Universiteit Gent
Faculteit Ingenieurswetenschappen

Vakgroep
Mechanische Constructie en Productie
Voorzitter: Prof. Dr. Ir. J. DEGRIECK

Ontwikkeling van een crash-platform voor extreme impactbelastingen

door

Davy STANDAERT
Jeroen GOETHALS

Promotoren: Prof. Dr. Ir. J. DEGRIECK, Prof. Dr. Ir. W. VAN PAEPEGEM
Scriptiebegeleider: Ir. E. LAMKANFI

Scriptie ingediend tot het behalen van de academische graad van
burgerlijk bouwkundig ingenieur

Academiejaar 2006–2007

Voorwoord

Bij de start van het academiejaar moet iedere laatstejaarsstudent een thesisonderwerp kiezen, al vlug bleek dat we allebei interesse hadden in hetzelfde onderwerp, hieruit ontstond onze samenwerking. Onze achtergrond als industrieel ingenieur heeft de interesse voor dit onderwerp opgewekt, we zagen hierin een praktische oefening op de opgedane kennis tijdens onze studies burgerlijk bouwkundig ingenieur. Het vergde een grote inspannning, maar we zijn zeer trots om het eindresultaat aan u voor te stellen.

Aan het begin van dit afstudeerwerk zouden we enkele personen willen bedanken voor hun hulp bij het realiseren ervan. Eerst en vooral willen we onze promotoren, Prof. Dr. Ir. Joris Degrieck en Prof. Dr. Ir. Wim Van Paepegem bedanken voor het ter beschikking stellen van de software waarvan we gebruik mochten maken. Ook volgden ze ons eindwerk regelmatig en met deskundige commentaar op. Tevens willen we onze begeleider, Ebrahim Lamkanfi danken voor de steun, de opvolging en de nuttige tips die hij ons gegeven heeft doorheen het academiejaar. Hij was steeds bereid hulp te verschaffen en enkele nieuwe ideeën aan te brengen. Tevens gaat een woord van dank uit naar Prof. Dr. Ir. Patricia Verleysen die hulp bood bij het opstellen van de spectra van de impactbelasting. Tenslotte willen we alle mensen bedanken die onrechtstreeks in contact gekomen zijn met ons eindwerk (hierbij denken we in de eerste plaats aan onze ouders en vrienden) en ons zo op de één of andere manier geholpen hebben.

Davy Standaert
Jeroen Goethals
4 juni 2007

Toelating tot bruikleen

4 juni 2007

Davy Standaert Jeroen Goethals

Ontwikkeling van een crash-platform voor extreme impactbelastingen

door
Davy STANDAERT
Jeroen GOETHALS

Scriptie ingediend tot het behalen van de academische graad van
burgerlijk bouwkundig ingenieur

Academiejaar 2006-2007

Promotoren: Prof. Dr. Ir. J. DEGRIECK, Prof. Dr. Ir. W. VAN PAEPEGEM
Scriptiebegeleider: Ir. E. LAMKANFI
Faculteit Ingenieurswetenschappen
Universiteit Gent

Vakgroep Mechanische Constructie en Productie
Voorzitter: Prof. Dr. Ir. J. DEGRIECK

Samenvatting

Een drop weight test is een valopstelling waarbij men een impactor vanop een bepaalde hoogte naar beneden laat vallen op een proefstuk en nagaat welke schade aangericht wordt aan het proefstuk. Dergelijke testen worden reeds vaak uitgevoerd in laboratia maar weliswaar op kleine schaal. De uitdaging van deze thesis is om een crash platform te ontwikkelen voor een nieuwe grootschalige drop weight test, met een valhoogte van 25 m en een gewicht van de impactor van 500 kg. Het is de bedoeling deze proefopstelling te bouwen in een bestaande toren van de Universiteit Gent. Een dergelijke proefopstelling bestaat constructief uit twee delen, enerzijds is er de bovenbouw die het valgewicht takelt, loslaat en begeleidt tijdens de val, anderzijds is er het crash platform waarop het proefstuk gemonteerd wordt en dat de krachten opvangt en overdraagt naar de fundering. Vandaar dat het ontwerp van de proefopstelling opgesplitst werd in twee thesisonderwerpen. In dit werk wordt het crash platform van deze grootschalige drop weight test ontworpen. Dit platform moet in staat zijn de impactbelasting op te vangen en uit te dempen zodat de fundering en omliggende constructies zo weinig mogelijk hinder ondervinden.

In Hoofdstuk 1 wordt kort kennis gemaakt met de drop weight test door het geven van enkele voorbeelden. Daarna wordt een beeld geschetst van de bestaande toren waarin de proefopstelling dient te komen om uiteindelijk te komen tot de doelstelling en afbakening van de thesis.

In Hoofdstuk 2 wordt een voorstel gedaan voor de opbouw van het crash platform. Voor het uitvoeren van de analytische berekeningen wordt dit crash platform omgevormd tot een model met twee vrijheidsgraden. Drie methoden worden toegepast op het model, vooreerst wordt geen rekening gehouden met demping en komt men tot een eerste voorstel voor de dimensies van het crash platform. De overige twee methoden houden wel rekening met demping en zullen het eerste ontwerp verfijnen, om zo te komen tot een optimaal ontwerp. Uiteindelijk worden de verscheidene analytische methodes met elkaar vergeleken en besproken.

In Hoofdstuk 3 wordt het optimale ontwerp van Hoofdstuk 2 onderworpen aan een numerieke berekening. Hiervoor wordt gebruik gemaakt van het eindige elementpakket ABAQUS. Er worden twee grote groepen van modellen opgesteld, enerzijds wordt de impactbelasting gesimuleerd als een sinusbelasting, anderzijds wordt de impactor mee gemodelleerd. Voor elk van deze modellen worden verschillende simulaties uitgevoerd en worden de resultaten besproken en vergeleken.

Hoofdstuk 4 heeft als doelstelling een vergelijking te maken tussen de analytische en numerieke berekeningen. Er wordt nagegaan als de gesloten formules van de analytische berekening corresponderen met de numerieke simulaties uit ABAQUS.

Uiteindelijk geeft Hoofdstuk 5 een besluit over het ontwerp van het crash platform op basis van de berekeningen in de vorige hoofdstukken.

Trefwoorden

impact, crash platform, dynamica, eindige-elementenmethode

Development of a crash-platform for extreme impact loads

Davy Standaert, Jeroen Goethals

Supervisor(s): Joris Degrieck, Wim Van Paepegem

Abstract—**This article explains the development of a crash platform for a new drop weight test on large scale (drop height of 25 m, weight of tup of 500 kg). The crash platform will be transformed into a model which can be submitted to analytical and numerical calculations. These two types of calculations will be compared and a final design of the crash platform will be proposed.**

Keywords—**Impact, Crash platform, Dynamics, Finite-elementsmethod**

I. Introduction

IN a drop weight test a falling weight, known as tup, falls from a certain height on a testobject. This type of test has been executed several times but mostly on small size. The drop weight test, discussed here, deals with a drop height of 25 m and a weight of the tup of 500 kg. You can imagine that a test with these dimensions results in extreme impact loads. These loads need to be absorbed and reduced by a crash platform on which the testobject is mounted. For the design of the crash platform, we assume that the tup drops directly on the platform, which is the worst case scenario.

The aim is to build the construction for the drop weight test in an existing drop tower, located in the centre of Ghent. Consequently the vibrations created by the drop test have to be reduced and damped, otherwise damage will occur on the existing foundations of the drop tower and the surrounding buildings.

II. Analytical calculations

A. Model

A typical arrangement of a crash platform for a drop weight test at large scale, which is the case here, consists of a steel anvil and a foundation block in concrete. To reduce the transmission of impact stresses to the concrete block and the foundation, an elastic pad consisting of rubber, air springs or another damping material is provided between the anvil and the foundation block and below the foundation block. The arrangement is shown in Fig. 1.

As the stiffness of through is usually very high compared to that of the pad below the foundation block, the through may be assumed to be rigidly supported on the foundation and so the arrangement can be presented as a two mass-spring-dashpot model in Fig. 2.

B. Analysis of the model

The equations of motion for the model shown in Fig.2 can be written as:

$$m_1 \cdot \ddot{z}_1 + k_1 \cdot (z_1 - z_2) + c_1 \cdot (\dot{z}_1 - \dot{z}_2) = F(t) \tag{1}$$

$$m_2 \cdot \ddot{z}_2 + k_2 \cdot z_2 + c_2 \cdot \dot{z}_2 - k_1 \cdot (z_1 - z_2) - c_1 \cdot (\dot{z}_1 - \dot{z}_2) = 0 \tag{2}$$

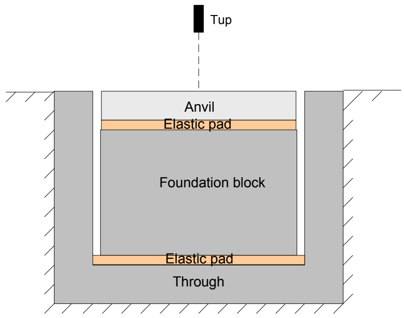


Fig. 1. Arrangement for the crash platform

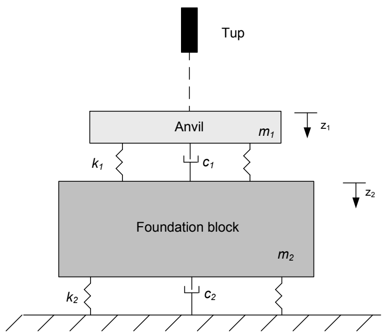


Fig. 2. Two mass-spring-dashpot model of the crash platform

in which $F(t)$ represents the impact load. To solve the equations of motion three types of methods are used. The first method is called the *method for impact machines* and is derived from literature [1] and doesn't take damping into account, in contrast with the other two methods. The second method is based on the law of conservation of momentum and assumes that the tup stays on the anvil after impact. Those two methods start the calculations after impact, which means that the amplitudes of anvil and foundation vibration are computed by considering the free vibrations of the system and given an initial velocity to the anvil by the impact of the tup. The third method is called the *method impact load* and describes the behavior of the tup and the system by equations of motion of both and makes it possible to determine the behavior of the system during the impact and after impact (free vibration). This method also deals with a local deformation of the anvil by the formula of Hertz [2]. The *method impact load* makes it possible to determine the impact load $F(t)$

and it seems that this load is very similar to a sine-function with a half period. By changing the ratio of modulus of elasticity, which is a parameter in the formula of Hertz, it is possible in this method to simulate two types of impact: a hard impact, $E_1/E_2 = 1$ and a soft impact $E_1/E_2 = 1.000$. The last one is the most realistic because it assumes an impact between a rigid body (the anvil) and a more deformable body (the tup).

C. Results

After several simulations, by changing the parameters (m, k and c see Fig.2) in the three methods we came to a mass of the steel anvil of 6.280 kg and of the concrete foundation block of 20.000 kg. The surface of the parts is limited by the geometrie of the drop tower to 2 by 2 square metres. The value of the spring constants k_1 and k_2 is set at 50.000.000 N/m and the damping constants c_1 and c_2 at 250.000 N.s/m. With these parameters we found, for a hard impact, to a maximal amplitude of anvil vibration of 30 mm and 20 mm for the foundation block vibration. The vibration was damped out after 1,5 s in both parts. The impact load $F(t)$ for hard impact has a maximal value of 40 MN. The same values for soft impact are 29 mm of maximal amplitude of anvil vibration and 19 mm for the foundation block vibration. The vibrations are damped out after 1,3 s in both parts and the maximal value of the impact load is 3,3 MN. The period of anvil and foundation block vibration is 0,18 s.

D. Remark

The anvil and foundation block are not a problem because they are steel and concrete parts. The elastic pads on the other hand can consist of several materials. In the crash platform, handled here, is chosen for a rubber pad between the anvil and foundation block and air springs below the foundation block. After calculation we found to a rubber of 0,16 m of thickness and a modulus of elasticity of 2.000.000 Pa. The air springs are single convolution springs type 19 by Firestone [3], 16 pieces with a total spring constant of 50.000.000 N/m.

III. Numerical calculations

For the numerical calculations the finite element program ABAQUS is used. The advantages are that we can take material behavior into account and the local deformations of the parts by dividing these parts into elements (mesh).

A. Modelling

In ABAQUS the model with the dimensions obtained from the analytical calculations is used, only one fourth of the crash platform is modelled for reasons of symmetry. Two groups of models are considered: one uses a sine-function as impact load, in the other group the tup is also modelled, which seems to be more realistic. A further division is made by the type of impact, hard and soft. Finally we also make a difference in the material behavior. The steel of the anvil can be elastic or elastic-plastic. The concrete of the foundation block is elastic. The two elastic pads are modelled as a hyperelastic 8% sulfur rubber with the Arruda-Boyce strain energy potential. This means that the air springs are replaced by rubber because of the difficulty of modelling air springs in ABAQUS.

B. Results

The results of the different models are analysed by the deformations and stresses in the different parts. The first conclusion is that there seems to be a good agreement in maximal amplitudes of anvil and foundation block between the two groups of models. This means that the impact load modelled by a sine-function was a realistic choice. During soft impact there is no influence of the steel as an elastic material or an elastic-plastic material, indeed the deformations of the anvil at impact zone are not plastic and thus the stress stays below the yield stress. This is not the case when modelling a hard impact. If the steel is modelled as an elastic-plastic material, plastic deformations exist at the zone of impact and the stresses there exceed the yield stress. As moving further from this impact zone the stresses decrease and no more plastic deformations appear. It seems obvious that a hard impact involves plastic deformations which is confirmed by the model in ABAQUS. The stress wave, caused by the impact, is especially perceptible in the anvil and less in the foundation block. This is because the rubber between the anvil and foundation block isolates the stress wave in the anvil. The function of the foundation block is not to absorb stress but to create mass and so it reduces the vibrations. A view of the motion of the rubber below the anvil can be seen in Fig.3

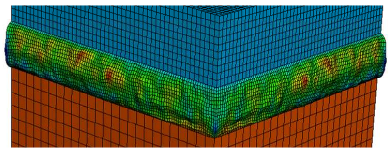


Fig. 3. Motion of the rubber below the anvil

After several simulations we retain one model in which the tup is also modelled as a part. We choose the model with the steel as an elastic-plastic material, concrete elastic and rubber hyperelastic. This results for the soft impact in a maximal amplitude of anvil vibration of 28 mm and 17 mm for the foundation block vibration. For the hard impact this results in a maximal amplitude of anvil vibration of 15 mm and 9 mm for the foundation block vibration. The period is as well for the anvil as the foundation block vibration equal to 0,2 s.

IV. Conclusions

As we compare both types of calculations, numerical and analytical, the results are very similar for a soft impact but different for the hard impact, this is because the numerical method takes the material behavior into account, especially the plastic deformations. The numerical calculations are always more accurate and the analytical calculations can be used to make a draft of the crash platform.

References

[1] S. PRAKASH, V. PURI, Foundations for Machines: Analysis and Design, John Wiley & Sons, New York (1988).

[2] W. BEITZ, K.-H. KÜTTNER, Dubbel-Taschenbuch für den Maschinenbau, Springer-Verlag, Berlin (1981).

[3] http://www.airsprings.com.au/Docs/PDF/ASAM_011_e.pdf

Inhoudsopgave

Hoofdstuk 1

Inleiding

In dit hoofdstuk wordt het thesisonderwerp voorgesteld. Eerst wordt kort kennis gemaakt met de drop weight test, want in deze thesis wordt een gedeelte van een grootschalige drop weight test ontwikkeld. Daarna wordt een beeld gevormd van de bestaande infrastructuur waar de proefopstelling zal terecht komen en de daaraan verbonden beperkingen. Tenslotte worden het doel en de afbakening van deze thesis toegelicht.

1.1 Drop weight test

Een proefopstelling waarbij men een gewicht van een bepaalde hoogte naar beneden laat vallen en bestudeert wat de impact hiervan is op een ander voorwerp, kan algemeen omschreven worden als een drop weight test. Deze testen bestaan in alle vormen en dimensies. Met enkele voorbeelden wordt getracht een dergelijke proefopstelling te verduidelijken.

In een doorsnee laboratorium waar men aan materiaalonderzoek doet en waar de interesse uitgaat naar het materiaalgedrag onder een impactbelasting, vindt men standaard proefopstellingen zoals in Figuur 1.1. Met dergelijke toestellen wordt een valhoogte van 1,25 m bereikt, uiteraard bestaan er ook grotere modellen. Duurdere types kunnen met behulp van luchtdruk hogere valhoogtes (bv. 20,4 m) simuleren. De impact-energie is bij dit type opstellingen steeds beperkt.

Figuur 1.1: Standaard impact machine

Een variant op de drop weight test is deze waarbij men het testobject zelf laat vallen van een bepaalde hoogte in plaats van een valgewicht te laten vallen op het testobject. Dit doet men bijvoorbeeld om containers die nucleair materiaal bevatten te testen. Dergelijke testen vinden onder meer plaats in *The Federal Institute for Materials Research and Testing (BAM)* in Horstwalde, 50 km ten zuiden van Berlijn. Het BAM heeft nog andere drop weight test opstellingen, maar dit is de meest indrukwekkende, zie Figuur 1.2. De toren heeft een totale hoogte van 36 m en kan testen uitvoeren met een maximaal gewicht van 200 ton en tot 30 m valhoogte. De impact wordt overgedragen naar de ondergrond met behulp van een gewapende betonblok van 2450 ton (dikte: 5 m, opp.: 14 m x 14 m) waarop een stalen plaat van 22 cm dikte en een oppervlakte van 10 m x 4,5 m wordt gemonteerd.

a b c

Figuur 1.2: BAM: a. Algemeen overzicht b. De proefopstelling c. De impact

Het woord proefopstelling is al enkele malen gevallen vandaar dat het nuttig is om dit wat beter te omschrijven. Zoals gebleken gaat het om een proefopstelling voor het uitvoeren van drop weight testen. Een eenvoudig voorbeeld toont aan waarvoor de proefopstelling zou kunnen gebruikt worden:
In heel wat opslagplaatsen van bedrijven rijden vorkheftrucks rond, die voorwerpen van rekken halen en vervolgens wegvoeren. Het kan nu gebeuren dat een voorwerp toevallig naar beneden valt op het dak van zo'n vorkheftruck. Het dak ondervindt deze impact en zal voldoende stevig moeten zijn om de bestuurder te beschermen. Men zou dus een dergelijke vorkheftruck aan een drop weight test kunnen onderwerpen.

Constructief kan een proefopstelling van een drop weight test in twee delen gesplitst worden. Enerzijds is er de valconstructie, dit is een soort frame dat het valgewicht takelt en via een loslaatmechanisme naar beneden laat vallen. Anderzijds is er een platform waarop het proefstuk bevestigd is en die de impact van het valgewicht opvangt. Vandaar dat het ontwikkelen van zo een proefopstelling opgesplitst wordt in twee thesisonderwerpen. De thesis van Alfons Theerens en Bert Herteleer [1] behandelt de valconstructie en men kan dit de bovenbouw noemen. In dit afstudeerwerk wordt een crash platform ontwikkeld dat de impactbelastingen veilig overdraagt naar de fundering en men kan dit de onderbouw noemen. Deze twee delen kunnen uiteraard niet volledig afzonderlijk beschouwd worden want het gaat tenslotte over dezelfde proefopstelling. Vandaar dat er in bepaalde delen van deze thesis zal verwezen worden naar de bovenbouw. Bij een proefopstelling komt er ook nog het luik van de instrumentatie. Dit omhelst het opmeten van grootheden tijdens de proef zelf, dit gedeelte zal echter niet in dit afstudeerwerk behandeld worden.

1.2 Bestaande infrastructuur

Op dit moment beschikt de Universiteit Gent over een toren gelegen langs de Sint Pietersnieuwstraat, zie Figuur 1.3 voor de exacte locatie. Deze toren was oorspronkelijk gebouwd voor het uitvoeren van windtunneltesten, maar reeds gedurende verscheidene jaren staat de toren volledig leeg. Een beeld van de toren is weergegeven in Figuur 1.5. In de toren is een schacht voorzien met een totale hoogte van circa 32 m en een opening van 3×3 m, in Figuur 1.4 kan men de openingen zien in de tussenvloeren die de schacht vormen. Binnen de vakgroep Mechanische Constructie en Productie is het idee ontstaan om deze toren te gaan gebruiken voor het uitvoeren van drop weight testen. Het zou de bedoeling zijn om de proefopstelling te vervaardigen in deze torenschacht. De bestaande toren met daarin de torenschacht legt een aantal beperkingen op aan de proefopstelling:

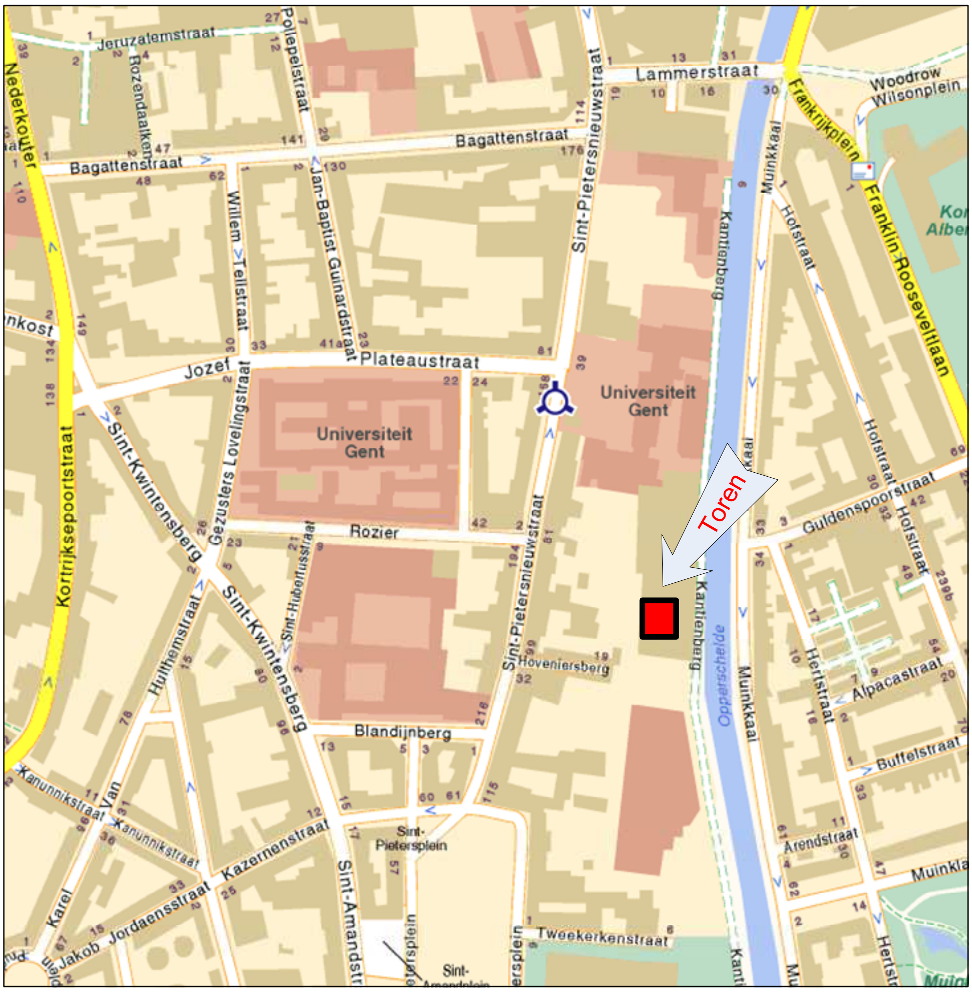
- De torenschacht heeft een oppervlakte van $3 \times 3\,\mathrm{m}$ en hierin zal de valconstructie en het crash platform moeten ingepast worden. Het beproeven van zeer grote testobjecten (zoals containers in het BAM) is bijgevolg uitgesloten. Vanwege de dimensies van de bovenbouw moet de oppervlakte van het crash platform beperkt worden tot een oppervlakte van $2 \times 2\,\mathrm{m}$.

- Constructieve redenen, zoals de ruimte die nodig is voor de takel en het loslaatmechanisme alsook de valconstructie zelf, zullen ervoor zorgen dat er geen gebruik kan gemaakt worden van de volledige 32 m. De valhoogte zal daarom beperkt worden tot 25 m.

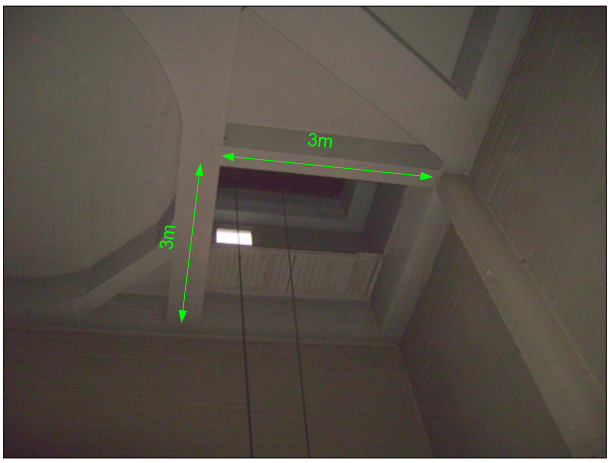
- De bestaande fundering van de toren is hoogstwaarschijnlijk een fundering op staal. Dergelijke funderingen zijn niet in staat om hoge impactbelastingen (500 kg, valhoogte 25 m) over te dragen naar de ondergrond. Er moet naast de bestaande fundering een nieuwe fundering voorzien worden die wel in staat is om de impactbelasting over te dragen.

- De toren zelf kan ten gevolge van de impactbelasting grote trillingen ondervinden. Voor dergelijke gebouwen zijn trillingen op lange termijn fataal. Er moet bijgevolg een constructie ontwikkeld worden die deze trillingen vernietigt of uitdempt. Deze constructie wordt het crash platform genoemd.

- Door de locatie van de toren, in het centrum van Gent, zijn de eerder besproken trillingen ook nefast voor de omliggende gebouwen. Vandaar dat het ontwikkelen van een crash platform onvermijdelijk is. Bij andere drop weight tests zoals die van het BAM, bevindt de opstelling zich in een onbewoond gebied en kunnen de trillingen vrij in de ondergrond worden geleid.



Figuur 1.3: Locatie toren



Figuur 1.4: Torenschacht

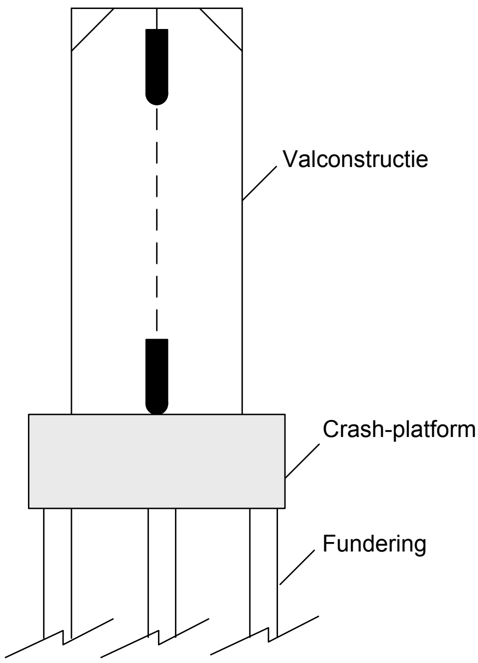
Figuur 1.5: Algemeen zicht toren

1.3 Doel en afbakening van de thesis

Schematisch kan een valopstelling weergegeven worden zoals in Figuur 1.6. Het onderscheid tussen de bovenbouw, zijnde de valconstructie, en de onderbouw, zijnde het crash platform wordt daar nogmaals aangegeven. In deze thesis wordt enkel het crash platform behandeld. Voor de ontwikkeling van het crash platform worden volgende gegevens over de valopstelling verzameld:

- Het crash platform wordt ontwikkeld voor een drop weight test met een hoogte van maximaal 25 m en een impactor (valgewicht) van maximaal 500 kg.
- Het crash platform moet weerstand kunnen bieden tegen de meest nadelige situatie en dit is wanneer de impactor rechtstreeks inslaat op het crash platform. Wanneer deze situatie zich voordoet spreekt men van een accidentele belasting.
- Het crash platform moet kunnen ingepast worden in de bestaande torenschacht van de toren.

Uit deze ontwerpgegevens moet een ontwerp van het crash platform volgen. De dimensionering gebeurt volgens analytische en numerieke berekeningsmethoden. Het louter dimensioneren is echter niet de enige doelstelling, daarnaast worden de verschillende berekeningsmethoden kritisch geanalyseerd en met elkaar vergeleken.



Figuur 1.6: Schematische voorstelling van een valopstelling

Hoofdstuk 2

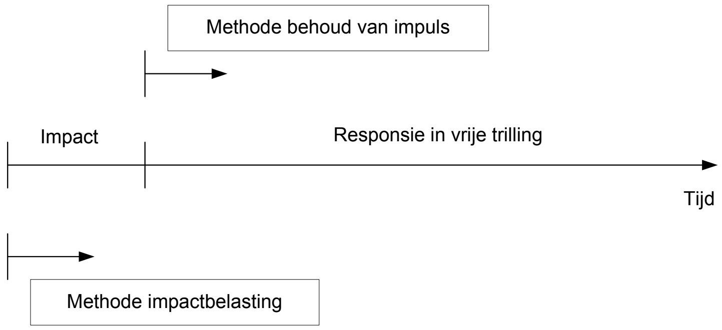
Analytische berekeningen

2.1 Inleiding

Na het voorstellen van het onderwerp, kan overgegaan worden tot de ontwikkeling van het crash platform. Er wordt gestart met een bestaande modelleringsprocedure voor impact machines, maar dan toegepast op deze proefopstelling. Deze modelleringsprocedure wordt de *methode voor impact machines* genoemd. Hierbij wordt er echter geen rekening gehouden met demping en wordt de impactbelasting zelf buiten beschouwing gelaten, wat voor een eerste benadering van het probleem aanvaardbaar is.

Vervolgens worden nog twee methoden uitgewerkt die wel rekening houden met demping, daar het de bedoeling is de opgewekte trilling ten gevolge van de impact zo vlug mogelijk te dempen. In de eerste methode wordt de impact zelf buiten beschouwing gelaten terwijl bij de tweede methode getracht wordt de impactbelasting zelf en de responsie erop te begroten. Voor de eenvoud wordt de eerste methode, de *methode van behoud van impuls* genoemd en de tweede de *methode impactbelasting*. Figuur 2.1 toont schematisch waar beide methoden starten met hun berekeningen. Het verloop van een crash test kan opgesplitst worden in de zuivere impact en de responsie erop. De *methode van behoud van impuls* start na de impact en de *methode impactbelasting* neemt de impact in beschouwing.

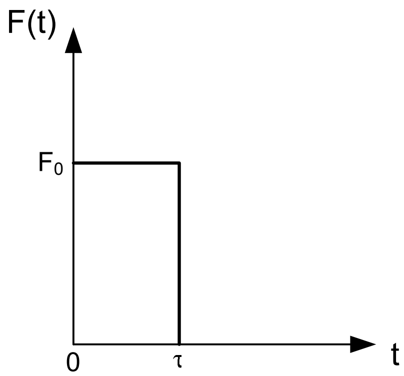
Ten slotte worden de drie methodes met elkaar vergeleken en beoordeeld. Er wordt op basis van de resultaten van deze methoden een definitieve keuze gemaakt voor de afmetingen van de verschillende onderdelen van het crash platform.



Figuur 2.1: Afbakening methodes

2.2 Methode voor impact machines

Een drop weight test vertoont veel gelijkenissen met een impact machine: het aanslaan van een hamer of een impactor op een aambeeld leidt zowel bij een drop weight test als bij een impact machine tot het ontstaan van een schokbelasting die uitgeoefend wordt op het stootblok. Deze schokbelasting, ook wel impulsbelasting genoemd, is een kortstondige, niet-periodisch aangrijpende kracht. Een voorbeeld van een schokbelasting met uniforme intensiteit F_0 en duur τ is weergegeven in Figuur 2.2.



Figuur 2.2: Schokbelasting met intensiteit F_0 en duur τ

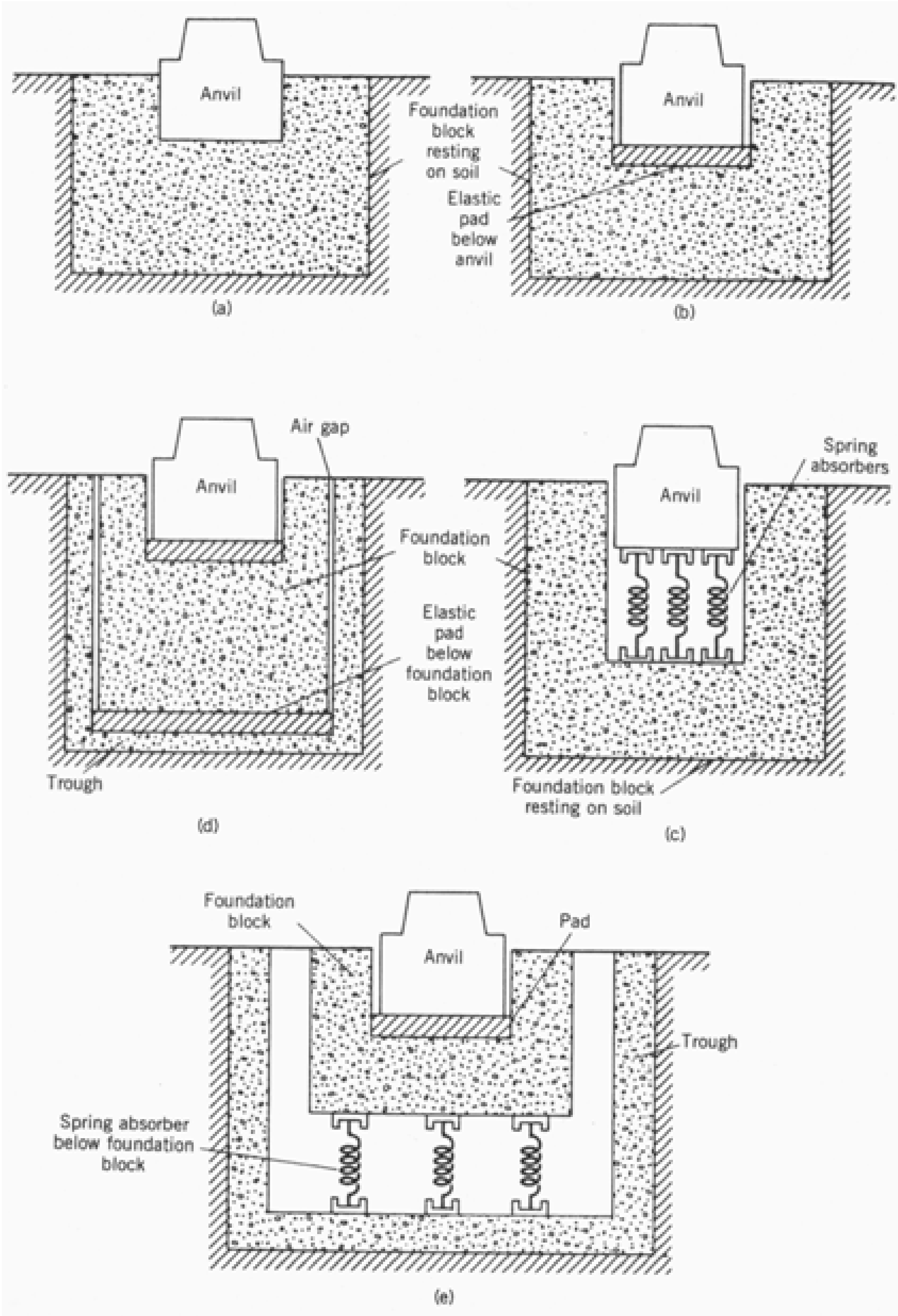
In de literatuur zijn verscheidene methodes beschreven voor het ontwerpen van funderingen voor impact machines. Aangezien een drop weight test kan vergeleken worden met een impact machine zal in deze paragraaf een methode uit de literatuur [2] voor het ontwerpen van impact machines toegepast worden op de valopstelling. In eerste instantie wordt een type crash platform gekozen, dat zal omgevormd worden tot een ongedempt model met twee vrijheidsgraden en waarvan een analyse zal uitgevoerd worden. Op die manier komt men tot een ontwerpprocedure, die dan specifiek zal toegepast worden op de valopstelling.

2.2.1 Soorten funderingen voor impact machines

Een opstelling van een impact machine bestaat uit een valconstructie, een valgewicht, een aambeeld en een funderingsblok. In het Engels spreekt men over de volgende benamingen: frame, tup, anvil, foundation block. De verschillende onderdelen worden kort toegelicht:

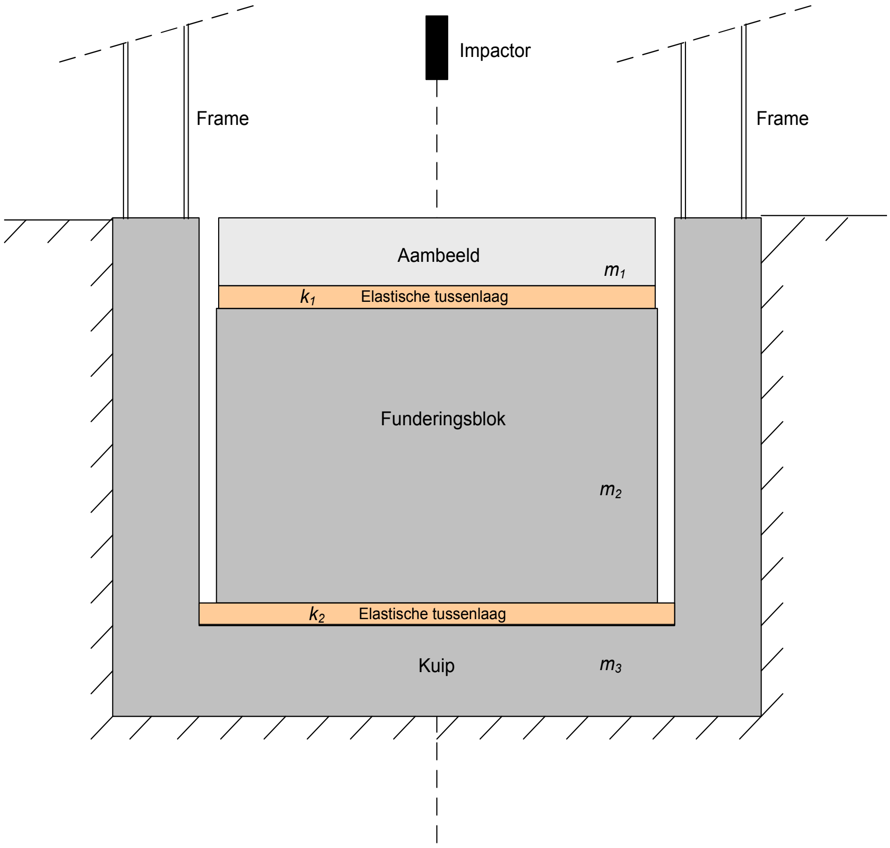
- De valconstructie is een constructie die het valgewicht takelt en naar beneden laat vallen.
- Het valgewicht is het voorwerp dat naar beneden valt. Voor het ontwerp van het crash platform zal gewerkt worden met een gewicht van maximaal 500 kg.
- Het aambeeld is een massieve stalen blok waarop het valgewicht neerkomt. Bij een proefopstelling zal er op dit aambeeld een proefstuk (bv. een bumper van een auto) gemonteerd worden die de impact van het valgewicht ondergaat.
- Het funderingsblok is een gewapend betonnen blok.

Er bestaan verschillende schikkingen van aambeeld en funderingsblok voor impact machines. De mogelijkheden zijn weergegeven in Figuur 2.3.



Figuur 2.3: Verschillende schikkingen voor aambeeld en funderingsblok [2]

In geval van kleine impact kan het aambeeld rechtstreeks op het funderingsblok geplaatst worden (Figuur 2.3(a)). De overdracht van de impact naar het funderingsblok kan gereduceerd worden door een elastische laag van rubber, kurk of een ander dempend materiaal aan te brengen tussen het aambeeld en het funderingsblok (Figuur 2.3(b)). In het geval van grotere impact kan de elastische laag vervangen worden door veren en dempers (Figuur 2.3(c)). De impact, die door het funderingsblok aan de fundering wordt overgedragen, kan op zijn beurt nog eens gereduceerd worden door onder het funderingsblok een elastische laag of veren en dempers aan te brengen (Figuur 2.3(d) en (e)). De schikkingen van Figuur 2.3 voor impact machines kunnen gebruikt worden om een type crash platform voor de valopstelling te kiezen. De valopstelling die in dit werk behandeld wordt, werkt met valgewichten van 500 kg en een valhoogte van 25 m. Dit zorgt voor extreme impact belastingen die door het crash platform zoveel mogelijk moeten gereduceerd worden. Er zal daarom enkel met de configuraties van Figuur 2.3(d) en (e) verder gewerkt worden. Het crash platform van de valopstelling kan dan voorgesteld worden zoals weergegeven in Figuur 2.4. In deze figuur bestaat het crash platform uit drie starre onderdelen: aambeeld, funderingsblok en kuip. Deze laatste staat in contact met de fundering en is door een luchtopening zijdelings gescheiden van het funderingsblok en aambeeld. De impact moet reeds zodanig gereduceerd zijn door het systeem van aambeeld, funderingsblok en elastische lagen dat de kuip zo goed als geen invloed van de impact ondervindt. Vandaar dat deze kuip het ideale onderdeel vormt om de valconstructie op te bevestigen. Op die manier zal de valconstructie gevrijwaard blijven van de trillingen afkomstig van de impact. In Figuur 2.4 ziet men ook dat het valgewicht voorgesteld wordt door een impactor. Dit is enkel een kwestie van benaming en in wat volgt zal verder gewerkt worden met de impactor als benaming voor het valgewicht.



Figuur 2.4: Crash platform

2.2.2 Keuze elastische lagen

De term elastische laag moet men zeer ruim opvatten, traditionele metalen veren kunnen hiervoor ook gebruikt worden. Er wordt echter gezocht naar materialen die een goede isolerende en dempende werking hebben.

Als tussenlaag voor het aambeeld en het funderingsblok wordt gekozen voor rubber, vanwege zijn dempende werking. Rubber is ook het ideale materiaal om een gelijkmatige krachtoverdracht te verwezenlijken tussen het stalen aambeeld en het betonnen funderingsblok. Door het rubber worden lokale spanningsconcentraties in het beton vermeden. Rubber heeft een goede dempende werking maar scoort minder goed op het gebied van isolerende eigenschappen, vandaar dat rubber alleen niet zal volstaan.

Om een goede isolerende werking te verkrijgen, wordt gebruik gemaakt van luchtveren tussen het funderingsblok en de kuip. Het grote voordeel van luchtveren is dat de heersende luchtdruk kan aangepast worden naar gelang de situatie, ze zijn dus zeer flexibel, daarenboven nemen ze relatief weinig plaats in. Luchtveren zijn de best isolatoren, maar hun dempende werking is te verwaarlozen.

Door de dempende werking van het rubber te combineren met de isolerende eigenschappen van de luchtveren wordt het doel van het crash platform bereikt. Het komt er nu nog op neer het type rubber en luchtveren te bepalen.

2.2.3 Opstellen van een model

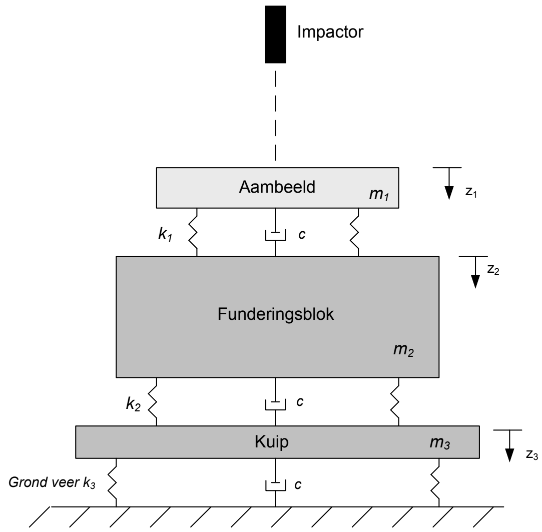
Het crash platform in Figuur 2.4 kan omgevormd worden tot een model voor het opstellen van analytische uitdrukkingen. Dit model is weergegeven in Figuur 2.5 en heeft drie vrijheidsgraden die bestaan uit de verticale beweging van de stijve lichamen.

De berekeningen zullen verder vereenvoudigd worden door het maken van volgende aannames:

1. Het aambeeld, funderingsblok, kuip, frame en impactor zijn stijve lichamen.
2. De elastische tussenlagen en de grond kunnen gesimuleerd worden als equivalente, gewichtsloze, elastische veren.
3. De demping van de elastische tussenlagen en de grond wordt verwaarloosd.
4. De duur van impact is kort in vergelijking met de periode van natuurlijke trilling van het systeem.
5. Er is geen wrijving langsheen het funderingsblok.
6. De impactor slaat centrisch in op het aambeeld.
7. De stijfheid van de grond is veel groter dan de stijfheid van het systeem.

Geldigheid van de aannames

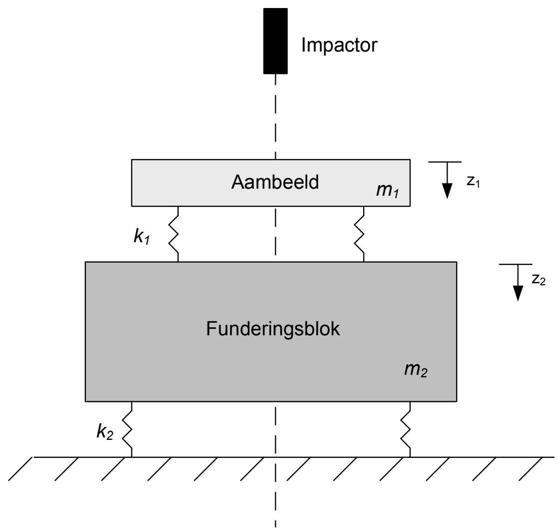
Aanname 1 over de stijfheid van het aambeeld, funderingsblok, kuip, frame en impactor is als eerste benadering correct. Men kan zich weliswaar voorstellen dat de zone waar de impactor op het aambeeld terecht komt meer zal doorbuigen. Maar om een beeld te krijgen van de globale zakking van de onderdelen kan men deze als stijf veronderstellen. Door ervoor te zorgen dat de spanningen en vervormingen van de elastische lagen in de elastische zone van het σ-ε



Figuur 2.5: Model met drie vrijheidsgraden

diagram blijven, kan men deze inderdaad als elastisch beschouwen. De aanname van het elastisch gedrag van grond gaat minder op, aangezien grond een visco-elastisch materiaal is. Aanname 2 is bijgevolg maar ten dele gerechtvaardigd. De derde aanname over het verwaarlozen van de demping van de elastische lagen en de grond is niet correct. Elk materiaal beschikt over dempingseigenschappen en deze kunnen niet zomaar buiten beschouwing gelaten worden. Het systeem moet trouwens de trilling juist zo goed mogelijk proberen te dempen. Aanname 4 gaat wel op want de duur van impact is zeer kort terwijl het systeem na deze impact nog zal natrillen met een periode groter dan de duur van impact (paragraaf 2.5). Het voorzien van luchtopeningen tussen de kuip en het funderingsblok zorgt ervoor dat er geen wrijving ontstaat langsheen het funderingsblok (aanname 5). De zesde aanname is enkel een kwestie van ontwerp. In overleg met de studenten die de valconstructie ontwerpen is ervoor gekozen om de impactor steeds centraal op het aambeeld te laten inslaan. Aanname 7 zorgt ervoor dat het model met drie vrijheidsgraden kan vereenvoudigd worden tot een model met twee vrijheidsgraden. Men gaat er namelijk van uit dat de elastische laag onder het funderingsblok steunt op een stijf geheel bestaande uit de kuip en de fundering. De stijfheid van deze delen is inderdaad veel groter dan de stijfheid van de elastische laag.

De aannames zijn weliswaar niet allemaal volledig correct, maar ze zorgen er daarentegen wel voor dat de berekeningen van de trillingen van het crash platform vereenvoudigd kunnen worden. Het model waarmee de berekeningen uitgevoerd worden, kan beschreven worden als een ongedempt systeem met twee vrijheidsgraden en is afgebeeld in Figuur 2.6.



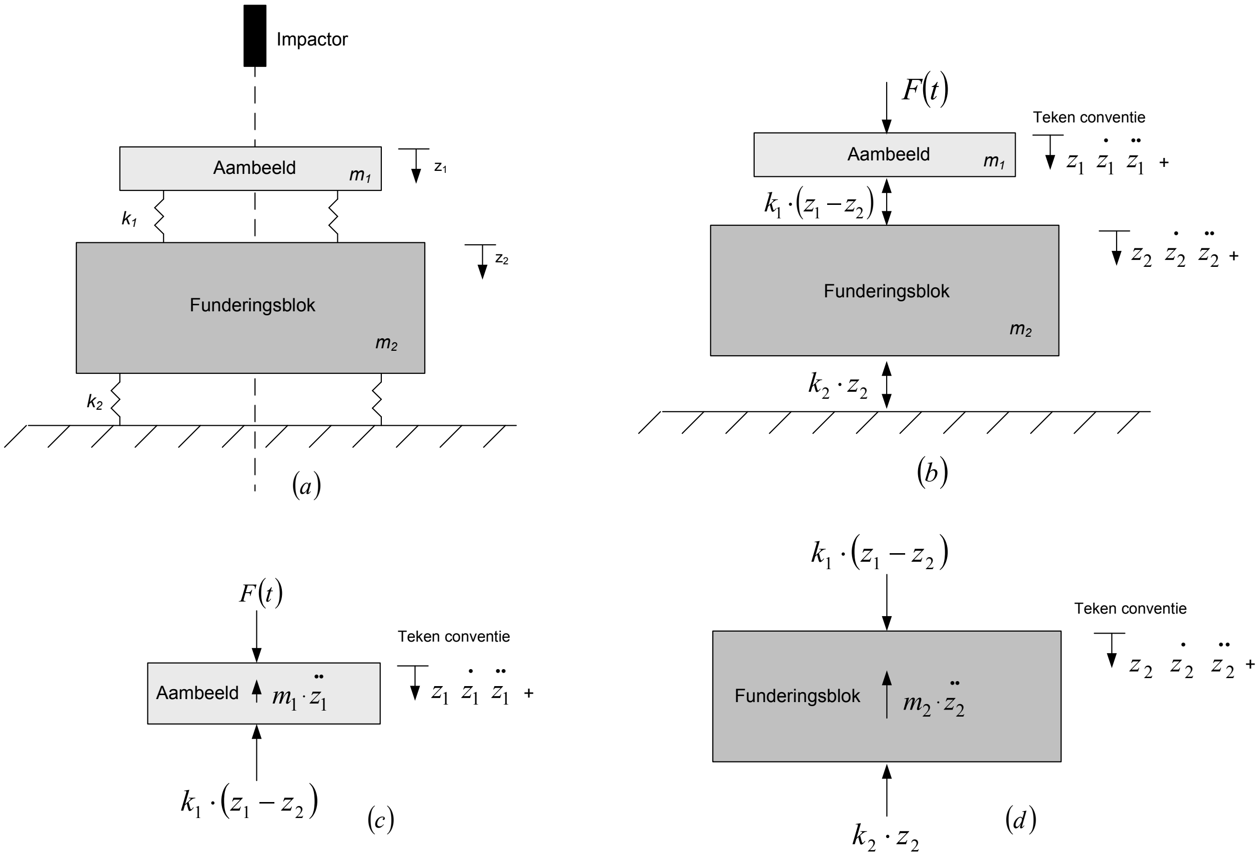
Figuur 2.6: Ongedempt model met twee vrijheidsgraden

2.2.4 Analyse van het ongedempt model met twee vrijheidsgraden

Het model met twee vrijheidsgraden zal nu verder onderzocht worden. De bewegingsvergelijkingen worden opgesteld, de natuurlijke frequenties van het systeem en de amplitudes van trilling van het aambeeld en funderingsblok zullen bepaald worden.

Bewegingsvergelijkingen

De bewegingsvergelijkingen van het twee massa - twee veren systeem worden opgesteld door het vrijmaken van de lichamen. Het vrijgemaakte model met de erop inwerkende krachten is weergegeven in Figuur 2.7



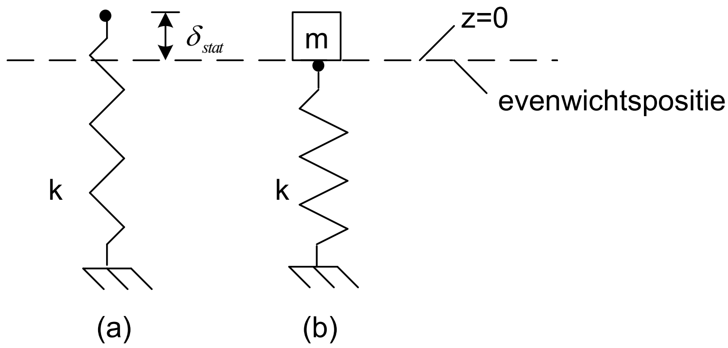
Figuur 2.7: (a) Systeem met twee vrijheidsgraden (b) Vrijgemaakt systeem (c) Vrijgemaakt aambeeld (d) Vrijgemaakt funderingsblok

De positie waarin het systeem zich in Figuur 2.7(a) bevindt is een evenwichtspositie. Dit wordt toegelicht aan de hand van een eenvoudig voorbeeld.

Figuur 2.8(a) toont een veer in niet-ingedrukte positie. Wanneer een massa m op de veer geplaatst wordt, dan komt het massa-veer systeem terecht in de positie van Figuur 2.8(b). De statische deflectie δ_{stat} van de veer vanuit de niet-ingedrukte positie is

$$\delta_{stat} = \frac{m \cdot g}{k} \tag{2.1}$$

waarin m de massa, g de versnelling veroorzaakt door de zwaartekracht en k de veerconstante voorstelt. De positie van het systeem dat correspondeert met die in Figuur 2.8(b) wordt beschouwd als de evenwichtspositie. Wanneer dit toegepast wordt op het systeem in Figuur 2.7(a) dan stemt $z_1 = 0$ en $z_2 = 0$ overeen met een evenwichtspositie. Het aambeeld en funderingsblok hebben al een statische deflectie ondergaan. Door te vertrekken vanuit deze



Figuur 2.8: Massa-veer systeem. (a) Niet-ingedrukte veer (b) Evenwichtspositie

evenwichtspositie moet geen rekening meer gehouden worden met de gravitatiekrachten van het aambeeld en funderingsblok. De krachten die op de vrijgemaakte lichamen inwerken in Figuur 2.7(c) en (d), zijn de volgende:

- $m \cdot \ddot{z}$ beschrijft de traagheid van het lichaam, wat wil zeggen dat er een kracht nodig is om het lichaam te doen versnellen.
- $k \cdot z$ is een veerkracht. Het is een mechanische kracht waarmee het lichaam tracht zijn oorspronkelijke vorm in te nemen na vervormd te zijn (ingedrukt of uitgetrokken).
- *F(t)* is de impactbelasting. Deze kracht wordt door de impactor op het systeem uitgeoefend.

Het stel veralgemeende coördinaten die de beweging van het systeem beschrijft, worden gegeven door

$$z(t) = \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

De snelheid en versnelling worden gegeven door $\dot{z}$(t) en $\ddot{z}$(t). Het vrijmaken van het aambeeld in Figuur 2.7(c) geeft de bewegingsvergelijking:

$$m_1 \cdot \ddot{z}_1 + k_1 \cdot (z_1 - z_2) = F(t) \tag{2.3}$$

Het vrijmaken van het funderingsblok in Figuur 2.7(d) geeft de tweede bewegingsvergelijking:

$$m_2 \cdot \ddot{z}_2 + k_2 \cdot z_2 - k_1 \cdot (z_1 - z_2) = 0 \tag{2.4}$$

In vgln.(2.3) en (2.4) zijn m_1 de massa van het aambeeld, m_2 de massa van het funderingsblok, k_1 een equivalente veer voor de elastische laag onder het aambeeld, k_2 een equivalente veer voor de elastische laag onder het funderingsblok, z_1 de verplaatsing van het aambeeld en z_2 de verplaatsing van het funderingsblok. Vgln.(2.3) en (2.4) vormen een stelsel bewegingsvergelijkingen die de beweging van het crash platform beschrijven.

Natuurlijke frequenties

De natuurlijke frequenties van het crash platform worden bekomen door het systeem te beschouwen in vrije trilling. Dit komt neer op het feit dat de impactbelasting F(t) gelijk aan nul wordt gesteld. De bewegingsvergelijkingen voor vrije trilling kunnen dan geschreven worden als

$$m_1 \cdot \ddot{z}_1 + k_1 \cdot (z_1 - z_2) = 0 \tag{2.5a}$$

$$m_2 \cdot \ddot{z}_2 + k_2 \cdot z_2 - k_1 \cdot (z_1 - z_2) = 0 \tag{2.5b}$$

De oplossingen van deze differentiaalvergelijkingen worden gegeven door

$$z_1 = Z_1 \sin \omega_n t \tag{2.6a}$$

$$z_2 = Z_2 \sin \omega_n t \tag{2.6b}$$

Substitueren van vgl.(2.6) in vgl.(2.5) geeft

$$-m_1\omega_n^2 Z_1 + k_1 Z_1 - k_1 Z_2 = 0 \tag{2.7a}$$

$$(-m_2\omega_n^2 + k_2)Z_2 + k_1 Z_2 - k_1 Z_1 = 0 \tag{2.7b}$$

Uit vgl.(2.7) haalt men

$$\frac{-m_2\omega_n^2 + k_2 + k_1}{k_1} = \frac{k_1}{-m_1\omega_n^2 + k_1}$$

Na vereenvoudigen wordt dit

$$m_1 m_2 \omega_n^4 - k_2 m_1 \omega_n^2 - k_1 m_1 \omega_n^2 - k_1 m_2 \omega_n^2 + k_1 k_2 = 0$$

of

$$\omega_n^4 - (\frac{k_2}{m_2} + \frac{k_1}{m_2} + \frac{k_1}{m_1})\omega_n^4 + \frac{k_1}{m_1}\frac{k_2}{m_2} = 0$$

Stelt men

$$\mu = \frac{m_1}{m_2}$$

Dan bekomt men

$$\omega_n^4 - (\frac{k_2(m_1+m_2)}{(m_1+m_2)m_2} + \frac{\mu k_1}{m_1} + \frac{k_1}{m_1})\omega_n^2 + \frac{k_1}{m_1+m_2}\frac{m_1+m_2}{m_1}\frac{k_2}{m_2} = 0$$

of

$$\omega_n^4 - (1+\mu)(\omega_{nl1}^2 + \omega_{nl2}^2)\omega_n^2 + (1+\mu)\omega_{nl1}^2\omega_{nl2}^2 = 0 \tag{2.8}$$

waarin

$$\omega_{nl1} = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} \tag{2.9a}$$

$$\omega_{nl2} = \sqrt{\frac{k_2}{m_1+m_2}} \tag{2.9b}$$

de limiet natuurlijke frequenties zijn. De twee natuurlijke frequenties ω_{n1} en ω_{n2} van het systeem worden gevonden door het oplossen van vgl.(2.8) naar ω_n^2.

Amplitudes van aambeeld en funderingsblok

Het berekenen van de amplitudes van het aambeeld en funderingsblok gebeurt door het systeem met twee vrijheidsgraden te beschouwen in vrije trilling waarbij aan het aambeeld een beginsnelheid wordt gegeven die veroorzaakt wordt door de impact van de impactor. De oplossingen voor de amplitudes van de trilling worden bekomen door z_1 en z_2 als volgt uit te drukken

$$z_1 = C_1 \sin\omega_{n1}t + C_2 \sin\omega_{n2}t \tag{2.10a}$$

$$z_2 = D_1 \sin\omega_{n1}t + D_2 \sin\omega_{n2}t \tag{2.10b}$$

De beginvoorwaarden van de trilling worden gegeven door uit te drukken dat op $t = 0$ geldt

$$z_1 = z_2 = 0 \tag{2.11a}$$

$$\dot{z_1} = v_{1,0} \quad en \quad \dot{z_2} = 0 \tag{2.11b}$$

Hierin stelt $v_{1,0}$ de beginsnelheid van het aambeeld voor. Het subscript 1 staat voor het aambeeld en 0 voor het tijdstip $t = 0$. Substitueren van z_1 en z_2 uit vgl.(2.10) in vgl.(2.5) en gebruik makend van de beginvoorwaarden gegeven door vgl.(2.11), worden de uitdrukkingen voor z_1 en z_2 verkregen

$$z_1 = \frac{1}{\omega_{n2}^2 - \omega_{n1}^2}\{\frac{(\omega_{nl1}^2 - \omega_{n1}^2)\sin\omega_{n2}t}{\omega_{n2}} - \frac{(\omega_{nl1}^2 - \omega_{n2}^2)\sin\omega_{n1}t}{\omega_{n1}}\} \cdot v_{1,0} \tag{2.12a}$$

$$z_2 = \frac{(\omega_{nl1}^2 - \omega_{n2}^2)(\omega_{nl1}^2 - \omega_{n1}^2)}{\omega_{nl1}^2(\omega_{n2}^2 - \omega_{n1}^2)}(\frac{\sin\omega_{n2}t}{\omega_{n2}} - \frac{\sin\omega_{n1}t}{\omega_{n1}}) \cdot v_{1,0} \tag{2.12b}$$

De bijdrage van de hoogste van de twee natuurlijke frequenties, ω_{n1} en ω_{n2}, tot de amplitude van beweging is klein [3] en mag verwaarloosd worden voor alle praktische gevallen. Ook de termen van $\sin\omega_{n2}t$ (waarbij $\omega_{n2} > \omega_{n1}$) in vgl.(2.12) mogen verwaarloosd worden. De maximum waarden van de verplaatsingen van aambeeld en funderingsblok worden ($\sin\omega_{n1}t = 1$)

$$Z_1 = \frac{(\omega_{nl1}^2 - \omega_{n2}^2)}{(\omega_{n2}^2 - \omega_{n1}^2)\omega_{n1}} \cdot v_{1,0} \tag{2.13a}$$

en

$$Z_2 = \frac{(\omega_{nl1}^2 - \omega_{n2}^2)(\omega_{nl1}^2 - \omega_{n1}^2)}{\omega_{nl1}^2(\omega_{n2}^2 - \omega_{n1}^2)\omega_{n1}} \cdot v_{1,0} \tag{2.13b}$$

De waarden van de amplitudes van het aambeeld en funderingsblok kunnen bepaald worden met vgl.(2.13) door substitueren van de waarden van ω_{nl1}, ω_{n1}, ω_{n2} en $v_{1,0}$.

Beginsnelheid van de impactor op moment van impact

De snelheid van de impactor op het moment van impact op het aambeeld is de beginsnelheid en wordt voorgesteld door $v_{i,0}$, waar het subscript i staat voor de impactor en 0 voor het moment van impact op tijdstip $t = 0$. Tijdens de vrije val kan men aannemen dat de impactor zich in een conservatief systeem bevindt. De wet van behoud van energie is geldig en daaruit kan de beginsnelheid van de impactor bepaald worden. Wanneer de impactor vanop een hoogte h naar beneden valt, kan de potentiële geschreven worden als

$$E_{pot} = m_i g h \tag{2.14}$$

Hierin is m_i de massa van de impactor, g de versnelling veroorzaakt door de zwaartekracht en h de valhoogte. Op het moment van impact is de potentiële energie omgezet in kinetische energie die gegeven wordt door

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m_i v_{i,0}^2 \tag{2.15}$$

Gelijkstellen van E_{pot} aan E_{kin} geeft de beginsnelheid $v_{i,0}$

$$v_{i,0} = \sqrt{2gh} \tag{2.16}$$

Beginsnelheid van het aambeeld

De beginsnelheid van het aambeeld $v_{1,0}$ net na de impact van de impactor kan bepaald worden door gebruik te maken van de wet van behoud van impuls. Het ontwerp van de valconstructie zorgt ervoor dat de impactor centrisch inslaat op het aambeeld. Deze centrale impact resulteert enkel in translatie trillingen in verticale richting en dus moet alleen de lineaire impuls beschouwd worden. De impuls van de impactor voor impact is $m_i v_{i,0}$, met m_i de massa en $v_{i,0}$ de beginsnelheid van de impactor. Het aambeeld is initieel in rust, en de impuls is nul voor de impact. De impuls van de impactor en het aambeeld kan dan geschreven worden als

$$m_i v_{i,0} + 0 \tag{2.17}$$

De impuls van de impactor en aambeeld na de impact is

$$m_i v_{i,t} + m_1 v_{1,0} \tag{2.18}$$

Hierin is $v_{i,t}$ de snelheid van de terugkaatsing van de impactor na impact, subscript i staat opnieuw voor de impactor en t voor de terugkaatsing, m_1 de massa van het aambeeld en $v_{1,0}$ de snelheid van het aambeeld na impact. De wet van behoud van impuls voor stijve lichamen zegt dat de impuls voor impact en na impact in een conservatief systeem constant is. Er geldt

$$m_i v_{i,0} + 0 = m_i v_{i,t} + m_1 v_{1,0} \tag{2.19}$$

Vgl.(2.19) heeft twee onbekenden, $v_{i,t}$ en $v_{1,0}$. Er is bijgevolg nood aan een tweede vergelijking. Hiervoor kan beroep gedaan worden op een coëfficient e die als volgt gedefinieerd wordt

$$e = \frac{relatieve\ snelheid\ na\ impact}{relatieve\ snelheid\ voor\ impact} \tag{2.20}$$

De waarde van e hangt af van de materialen die betrokken zijn bij de impact. Voor een impact tussen twee perfect stijve lichamen is e gelijk aan 1. Wanneer een plastisch lichaam inslaat op een stijf lichaam is e gelijk aan nul. De waarde van e is dus gelegen tussen het bereik van 0 en 1. Voor de ontwerpfase kan gerekend worden met een waarde van $e = 0,5$. Vgl.(2.20) kan geschreven worden als

$$e = \frac{v_{1,0} - v_{i,t}}{v_{i,0} - 0} \tag{2.21}$$

Uit vgln.(2.19) en (2.21) halen we de uitdrukking voor $v_{1,0}$

$$v_{1,0} = \frac{1+e}{1+s} \cdot v_{i,0} \tag{2.22}$$

hierin is

$$s = \frac{m_1}{m_i} \tag{2.23}$$

2.2.5 Ontwerpprocedure voor het crash platform

Na de analyse van een systeem met twee vrijheidsgraden, kan er nu een ontwerpprocedure opgesteld worden die de dimensies van het crash platform geeft evenals de amplitudes van het aambeeld en funderingsblok.

Ontwerp gegevens

Hier worden alle gegevens verzameld omtrent de valopstelling en de geometrie van de valtoren.

Start dimensies voor het crash platform

Bij de start van de berekeningen zijn de dimensies van het aambeeld en funderingsblok nog onbekend. Om deze te bepalen kan gebruik gemaakt worden van volgende richtlijnen:

- Massa: de massa van het aambeeld mag genomen worden op 20 keer de massa van de impactor. De massa van het funderingsblok varieert gewoonlijk van 60 tot 120 keer de massa van de impactor volgens [3] en [4].
- Dikte: de dikte van het aambeeld en funderingsblok kan bepaald worden met de massa, de oppervlakte en volumieke massa van de onderdelen.

Natuurlijke frequenties van het crash platform

Bereken de limiet natuurlijke frequenties ω_{nl1} en ω_{nl2} als

$$\omega_{nl1} = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}$$
$$\omega_{nl2} = \sqrt{\frac{k_2}{m_1 + m_2}}$$

waarin

m_1 = massa van het aambeeld

m_2 = massa van het funderingsblok

k_1 = equivalente veer voor de elastische laag onder het aambeeld

k_2 = equivalente veer voor de elastische laag onder het funderingsblok

De natuurlijke frequenties ω_{n1} en ω_{n2} volgen uit de vergelijking

$$\omega_n^4 - (1+\mu)(\omega_{nl1}^2 + \omega_{nl2}^2)\omega_n^2 + (1+\mu)\omega_{nl1}^2\omega_{nl2}^2 = 0 \tag{2.25}$$

met

$$\mu = \frac{m_1}{m_2}$$

Snelheid van impactor en aambeeld

De snelheid van de impactor voor impact wordt bepaald uit

$$v_{i,0} = \sqrt{2gh}$$

waarin

h = de valhoogte

g = de versnelling ten gevolge van de zwaartekracht

De snelheid van het aambeeld $v_{1,0}$ na de impact is

$$v_{1,0} = \frac{1+e}{1+s} \cdot v_{i,0}$$

waarin

e = 0,5 voor ontwerp

$s = \frac{m_1}{m_i}$

Amplitudes van het aambeeld en funderingsblok

De beweging van het aambeeld en funderingsblok zijn z_1 en z_2 met als maximale waarden:
Voor het aambeeld

$$Z_1 = \frac{(\omega_{nl1}^2 - \omega_{n2}^2)}{(\omega_{n2}^2 - \omega_{n1}^2)\omega_{n1}} \cdot v_{1,0} \tag{2.26a}$$

Voor het funderingsblok

$$Z_2 = \frac{(\omega_{nl1}^2 - \omega_{n2}^2)(\omega_{nl1}^2 - \omega_{n1}^2)}{\omega_{nl1}^2(\omega_{n2}^2 - \omega_{n1}^2)\omega_{n1}} \cdot v_{1,0} \tag{2.26b}$$

2.2.6 Ontwerp van het crash platform

De ontwerpprocedure zal nu toegepast worden voor de valopstelling om te komen tot een ontwerp voor het crash platform en de amplitudes van de bewegingen van het aambeeld en funderingsblok. Figuur 2.4 toont de opbouw van het crash platform. Deze opbouw wordt omgevormd naar een systeem met twee vrijheidsgraden waarbij de demping verwaarloosd wordt, voorgesteld in Figuur 2.6.

Ontwerp gegevens

- Valopstelling. De bedoeling is om drop weight testen uit te voeren met een valhoogte van maximaal 25 m en een gewicht van de impactor van 500 kg. Er wordt bovendien vanuit gegaan dat de impactor rechtstreeks inslaat op het aambeeld. Voor het ontwerp van het crash platform is dit de meest nadelige situatie. De impactor en het aambeeld zullen uitgevoerd worden in staal en het funderingsblok in beton. Aan de elastische tussenlagen onder het aambeeld en funderingsblok zal een veerconstante k toegekend worden.

- Geometrie valtoren. De valtoren waarin de valopstelling zal uitgevoerd worden legt een aantal beperkingen op aan de afmetingen van het crash platform. In de valtoren is een torenschacht van 3 $\times$ 3 meter voorzien waarin de valopstelling moet komen. De valconstructie zal bevestigd worden op de kuip en tussen de kuip en het funderingsblok is nog een luchtopening voorzien (Figuur 2.4). Uit het ontwerp van de valconstructie [1] volgt dat er nog een oppervlakte van 2 $\times$ 2 meter overblijft voor het aambeeld en funderingsblok.

Voordimensionering van het crash platform

De massa's van het aambeeld en funderingsblok worden best zo laag mogelijk gehouden en dit om de kosten te drukken. Er wordt daarom gewerkt met een massa van het aambeeld van 20 keer de massa van de impactor en voor het funderingsblok 60 keer de massa van de impactor. De dikte van het aambeeld en funderingsblok kan bepaald worden uit de voorgaande gegevens. Voor de elastische tussenlagen onder het aambeeld en het funderingsblok zal gewerkt worden met een veerconstante k = 50.000.000 N/m. De veerconstante k wordt voorlopig vrij gekozen. Wanneer hiermee aanvaardbare resultaten verkregen worden, kan de waarde van k volstaan. Uit het voorgaande worden volgende gegevens verzameld:

ALGEMENE DATA

Valhoogte h = 25 m

$\rho_{staal} = 7.850\,\mathrm{kg}/m^3$

$\rho_{gewapend\ beton} = 2.500\,\mathrm{kg}/m^3$

IMPACTOR

Massa impactor $m_i = 500\,\mathrm{kg}$

AAMBEELD

Massa aambeeld m_1=20 $\cdot$ m_i=20$\cdot$500 = 10.000 kg = 10 ton

Oppervlakte aambeeld = 2 $\times$ 2 = 4 m^2

Dikte aambeeld $d_1 = \frac{10.000}{7.850 \cdot 4} = 0{,}32\,\text{m}$

FUNDERINGSBLOK

Massa funderingsblok $m_2 = 60 \cdot m_i$=60$\cdot$500 = 30.000 kg = 30 ton

Oppervlakte funderingsblok = 2 $\times$ 2 = 4 m^2

Dikte funderingsblok $d_2 = \frac{30.000}{2.500 \cdot 4} = 3\,\text{m}$

ELASTISCHE TUSSENLAGEN

Oppervlakte tussenlaag = 2 $\times$ 2 = 4 m^2

Equivalente veerconstanten $k_1 = k_2 = 50.000.000\,\text{N/m}$

Natuurlijke frequenties van het crash platform

Eerst worden de limiet natuurlijke frequenties bepaald:

$$\omega_{nl1} = \sqrt{\frac{50.000.000}{10.000}} = 70,71\,rad/s$$
$$\omega_{nl2} = \sqrt{\frac{50.000.000}{10.000 + 30.000}} = 35,36\,rad/s$$

De verhouding van de massa's van het aambeeld en funderingsblok wordt gegeven door

$$\mu = \frac{10.000}{30.000} = \frac{1}{3}$$

Deze waarden worden ingevuld in vgl.(2.25) om te komen tot de volgende uitdrukking

$$\omega_n^4 - 8.333,33 \cdot \omega_n^2 + 8,33 \cdot 10^6 = 0$$

Oplossen van deze kwadratische vergelijking naar ω_n^2

$$\omega_{n1} = 34,09\,rad/s$$

en

$$\omega_{n2} = 84,68\,rad/s$$

De twee verschillende periodes T_1 en T_2 van de vrije trilling van het systeem kunnen nu bekomen worden uit de respectievelijke natuurlijke frequenties

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_{n1}} = 0,184\,s$$

en

$$T_2 = \frac{2\pi}{\omega_{n2}} = 0,074\,s$$

Snelheid van impactor en aambeeld

De snelheid van de impactor

$$v_{i,0} = \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 25} = 22,15\,m/s$$

De snelheid van het aambeeld

$$v_{1,0} = \frac{1 + 0,5}{1 + \frac{10.000}{500}} \cdot 22,15 = 1,58\,m/s$$

Amplitudes van het aambeeld en funderingsblok

De hoger berekende waarden kunnen nu gebruikt worden om de maximale waarden van de beweging van het aambeeld Z_1 en funderingsblok Z_2 te bepalen. Z_1 en Z_2 haalt men uit vgln. (2.26a) en (2.26b)

$$Z_1 = 16,8\,mm$$

en

$$Z_2 = 12,9\,mm$$

Resultaat

Het resultaat van de berekeningen is samengevat in Figuur 2.9. Verder worden nog de waarden van de belangrijkste grootheden gegeven:

$\omega_{n1} = 34,09\,rad/s$

$\omega_{n2} = 84,68\,rad/s$

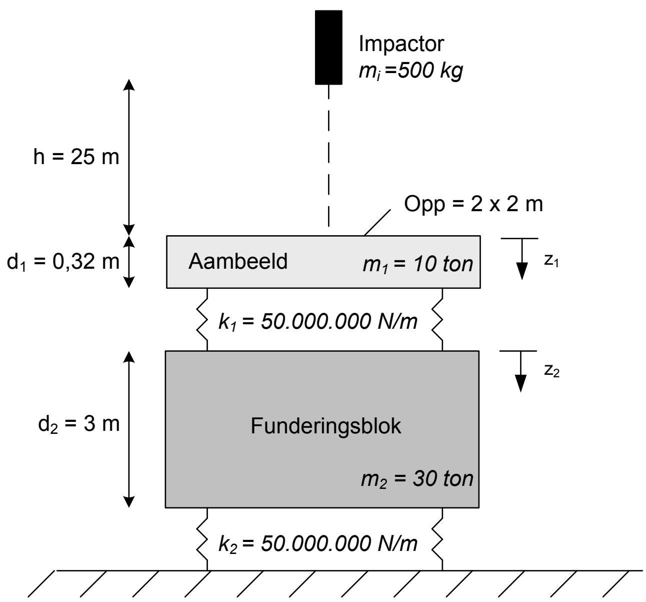
$\dot{z}_{i,0} = v_{i,0} = 22,15\,m/s$

$\dot{z}_{1,0} = v_{1,0} = 1,58\,m/s$

$Z_1 = 16,8\,mm$

$Z_2 = 12,9\,mm$

Deze maximale verplaatsingen van aambeeld en funderingsblok lijken voor een eerste benadering aanvaardbaar, maar daarover later meer.



Figuur 2.9: Dimensies crash platform

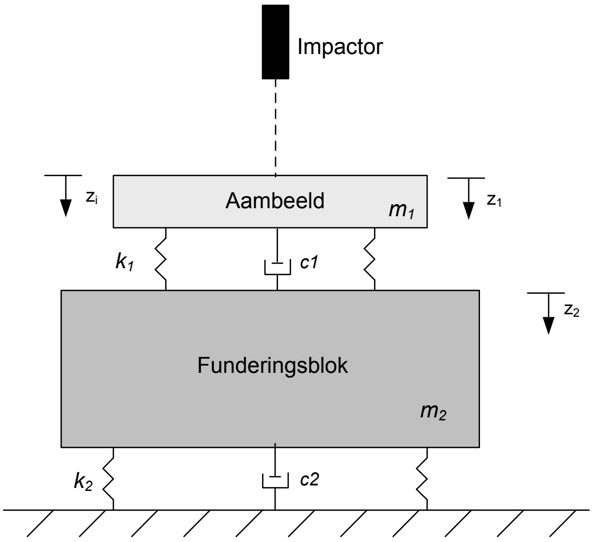
2.3 Definitief model

In de *methode voor impact machines* wordt er geen rekening gehouden met demping, in de twee methoden die volgen echter wel. Vandaar dat het model uit de vorige paragraaf moet aangepast worden. Figuur 2.10 toont het definitieve model waarmee wordt verder gerekend.

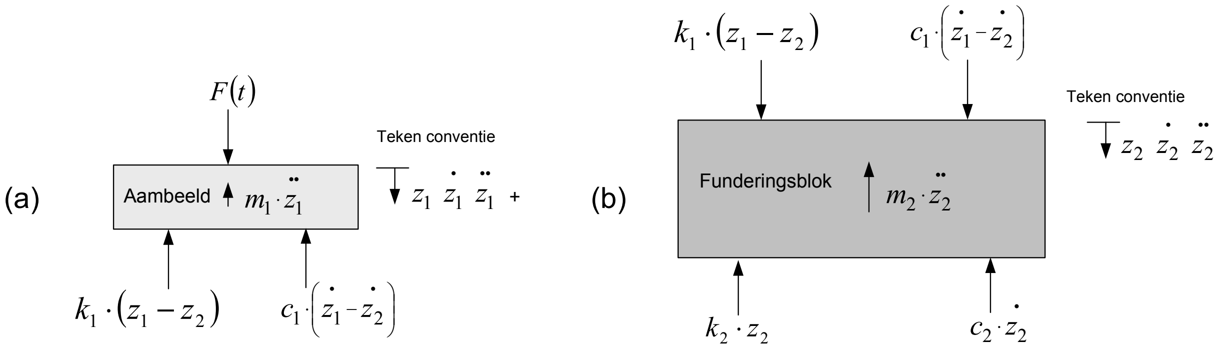
De dempers die worden ingevoerd zijn snelheidsdempers. Dit betekent concreet dat de dempingskracht afhankelijk is van de snelheid waarmee de demper wordt geactiveerd. Als c (N.s/m) de dempingsconstante is, dan is de dempingskracht

$$F_c = c \cdot \dot{z} \tag{2.28}$$

Door het invoeren van de dempers zullen de bewegingsvergelijkingen van het crash platform veranderen. Bij het vrijmaken van het aambeeld en het funderingsblok moeten de dempingskrachten ingevoerd worden, dit wordt in Figuur 2.11 geïllustreerd. Er dient opnieuw opgemerkt te worden dat er geen rekening wordt gehouden met de gravitatiekrachten, omdat in de evenwichtstoestand de gravitatie- en veerkrachten elkaar in evenwicht houden (cfr. paragraaf 2.2.4). De veerkrachten in de evenwichtstoestand zijn het gevolg van de statische indrukking ten gevolge van de eigen gewichten van aambeeld en funderingsblok.



Figuur 2.10: Definitief model



Figuur 2.11: (a) Vrijgemaakt aambeeld (b) Vrijgemaakt funderingsblok

Het definitieve stelsel bewegingsvergelijkingen van aambeeld en funderingsblok is

$$m_1 \cdot \ddot{z}_1 + k_1 \cdot (z_1 - z_2) + c_1 \cdot (\dot{z}_1 - \dot{z}_2) = F(t) \tag{2.29}$$

$$m_2 \cdot \ddot{z}_2 + k_2 \cdot z_2 + c_2 \cdot \dot{z}_2 - k_1 \cdot (z_1 - z_2) - c_1 \cdot (\dot{z}_1 - \dot{z}_2) = 0 \tag{2.30}$$

2.4 Methode van behoud van impuls

In dit stadium is er geen enkele parameter van het crash platform gekend. Uit de paragraaf 2.2 volgen enkel grootte-ordes voor deze onbekende parameters. Via een *trail and error* proces worden hier geschikte waarden voor gezocht. Deze parameters dienen zodanig gekozen te worden dat de amplitude van de trilling ten gevolge van de impactbelasting beperkt blijft en dat deze trilling binnen een aanvaardbare tijd uitgedempt wordt.

Om de reactie van het crash platform op de impactbelasting te kennen moet men de bewegingsvergelijkingen oplossen. De impactbelasting F(t) is echter onbekend. Om dit te omzeilen wordt er gebruik gemaakt van de wet van behoud van impuls [6].

Hierbij wordt het systeem conservatief verondersteld. Door toepassing van de wet van behoud van impuls wordt de effectieve impact buiten beschouwing gelaten en wordt enkel de responsie op de impact berekend. Er wordt ook verondersteld dat de impactor en het aambeeld na de impact samen bewegen en dat er dus een volledige energie-overdracht plaatsvindt. Concreet betekent dit dat de impactor na de impact niet terug gekaatst wordt. Met behulp van Figuur 2.12 schrijft men de wet van behoud van impuls uit.

$$m_i \cdot \dot{z}_{i,0} = (m_i + m_1) \cdot \dot{z}_{1,0} \tag{2.31}$$

Hierin is m_i de massa van de impactor, m_1 de massa van het aambeeld, $\dot{z}_{i,0}$ de snelheid van de impactor net voor de impact en $\dot{z}_{1,0}$ de gezamenlijke snelheid van impactor en aambeeld net na de impact. Hierbij volgen m_i en $\dot{z}_{i,0}$ uit de ontwerpgegevens, inderdaad m_i is maximaal 500 kg en uit vgl.(2.16) kan $\dot{z}_{i,0}$ berekend worden met een maximale valhoogte van 25 m. Door m_1 vrij te kiezen, kan $\dot{z}_{1,0}$ berekend worden als:

$$\dot{z}_{1,0} = \frac{m_i}{m_i + m_1} \cdot \dot{z}_{i,0} \tag{2.32}$$

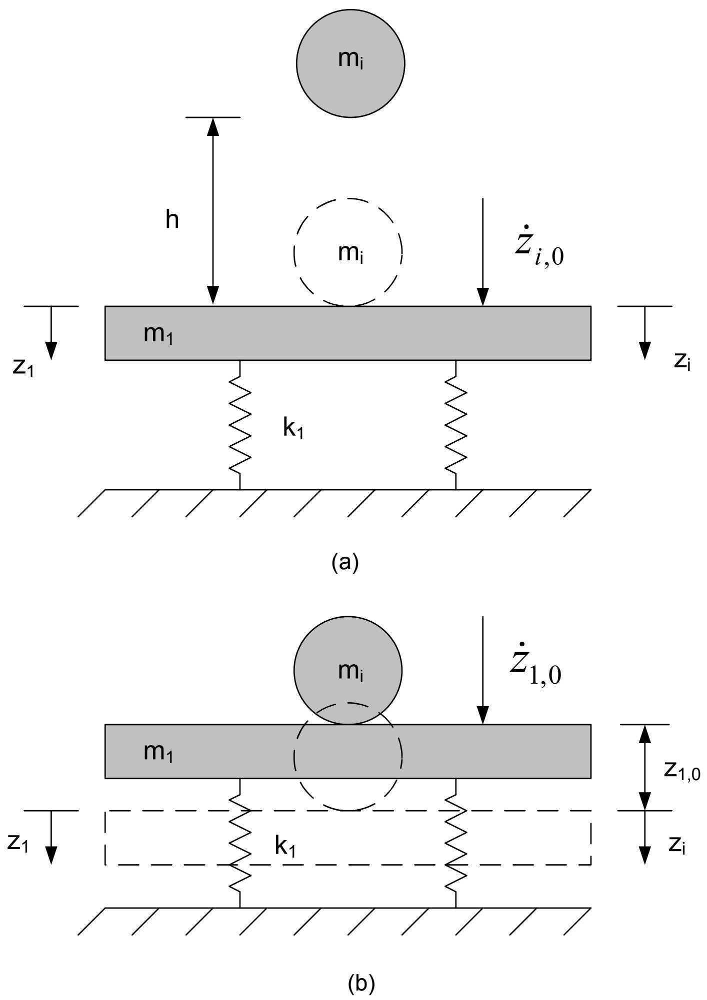
Deze snelheid wordt gebruikt als beginvoorwaarde bij het oplossen van de bewegingsvergelijkingen. Doordat de reactie na de impact berekend wordt is F(t) gelijk aan nul. Er is echter nog een extra beginvoorwaarde, namelijk een extra statische indrukking ten gevolge van het gewicht van de impactor. Deze statische indrukking wordt berekend als

$$z_{1,0} = \frac{m_i \cdot g}{k_1} \tag{2.33}$$

Doordat verondersteld wordt dat impactor en aambeeld samen trillen, moet in de bewegingsvergelijkingen de massa van het aambeeld vermeerderd worden met de massa van de impactor. Rekening houdend met F(t)=0 worden de bewegingsvergelijkingen

$$(m_1 + m_i) \cdot \ddot{z}_1 + k_1 \cdot (z_1 - z_2) + c_1 \cdot (\dot{z}_1 - \dot{z}_2) = 0 \tag{2.34}$$

$$m_2 \cdot \ddot{z}_2 + k_2 \cdot z_2 + c_2 \cdot \dot{z}_2 - k_1 \cdot (z_1 - z_2) - c_1 \cdot (\dot{z}_1 - \dot{z}_2) = 0 \tag{2.35}$$



Figuur 2.12: Behoud van impuls (a) Voor impact (b) Na impact

met als beginvoorwaarden

$$z_{1,0} = \frac{m_i \cdot g}{k_1} \tag{2.36}$$

$$\dot{z}_{1,0} = \frac{m_i}{m_i + m_1} \cdot \dot{z}_{i,0} \tag{2.37}$$

Het oplossen van de differentiaalvergelijkingen en de bijhorende beginvoorwaarden gebeurt met het programma MATLAB 7.0.1. Bijlage A geeft een beknopte uitleg over het oplossen van differentiaalvergelijkingen met MATLAB. Tevens is een programma geschreven voor het toepassen van de methode van behoud van impuls. Dit kan eveneens gevonden worden in Bijlage A.

Nu men in staat is om de bewegingsvergelijkingen met de bijhorende beginvoorwaarden op te lossen, kunnen de parameters één voor één aangepast worden en hun invloed op de responsie geanalyseerd worden. Uiteindelijk wordt een optimale combinatie van parameters weerhouden.

Deze ontwerpprocedure wordt gestart met dezelfde parameters als het voorbeeld in paragraaf 2.2.6, maar er worden nog waarden voor de dempingsconstanten toegevoegd. De dempingsconstanten c_1 en c_2 worden gelijk gesteld aan 250.000 N.s/m. Deze waarden worden vooreerst willekeurig gekozen. Wanneer blijkt dat hiermee de trilling voldoende snel uitgedempt wordt, kunnen de waarden behouden worden. Alle gegevens worden nogmaals samengevat.

$h = 25\,\mathrm{m}$

$m_i = 500\,\mathrm{kg}$

$m_1 = 10.000\,\mathrm{kg}$

$m_2 = 30.000\,\mathrm{kg}$

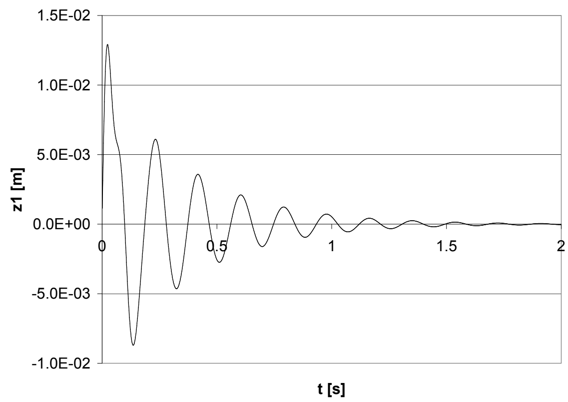
$k_1 = 50.000.000\,\mathrm{N/m}$

$k_2 = 50.000.000\,\mathrm{N/m}$

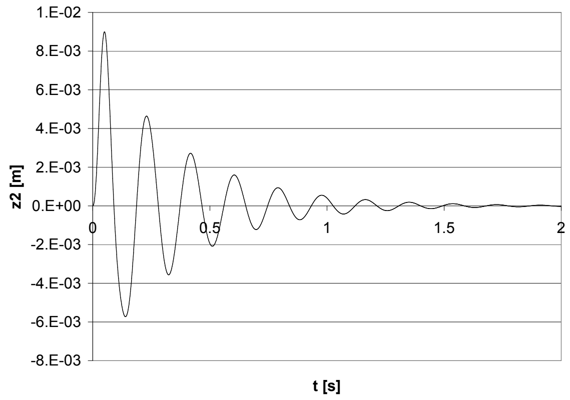
$c_1 = 250.000\,\mathrm{N.s/m}$

$c_2 = 250.000\,\mathrm{N.s/m}$

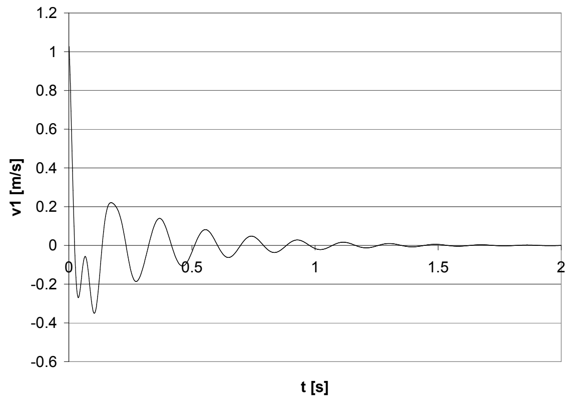
Met deze gegevens worden de bewegingsvergelijkingen opgelost en worden volgende resultaten verkregen.



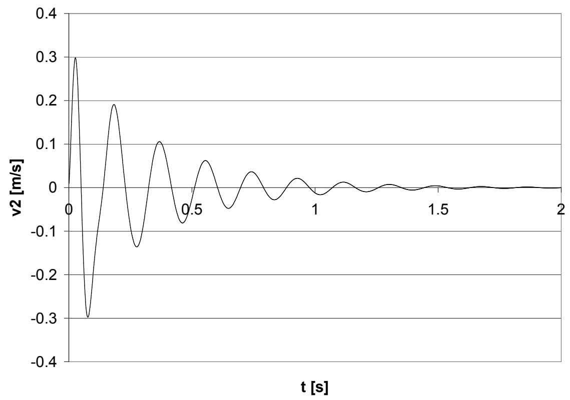
Figuur 2.13: Verplaatsing aambeeld



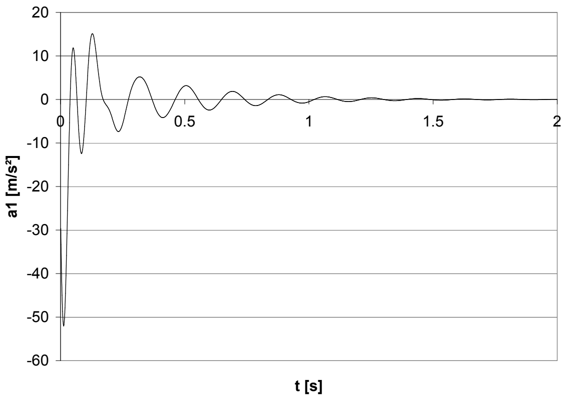
Figuur 2.14: Verplaatsing funderingsblok



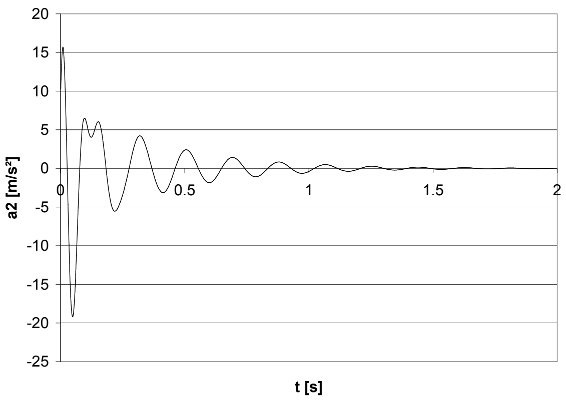
Figuur 2.15: Snelheid aambeeld



Figuur 2.16: Snelheid funderingsblok



Figuur 2.17: Versnelling aambeeld



Figuur 2.18: Versnelling funderingsblok

Men ziet duidelijk de invloed van de dempers, zonder deze dempers zou de amplitude van de trilling niet afnemen, en zouden de lichamen theoretisch oneindig lang blijven trillen. Ten gevolge van de demping is de trilling van het aambeeld en funderingsblok een harmonische trilling die exponentieel uitsterft en na ongeveer twee seconden volledig uitgedempt is. Men kan tevens zien dat de piekwaarden van de verplaatsingen van aambeeld en funderingsblok respectievelijk 12,9 mm en 9 mm zijn. Deze waarden zijn zeker aanvaardbaar, maar men mag niet uit het oog verliezen dat met deze amplitudes zeer grote massa's voor aambeeld en funderingsblok gepaard gaan. Indien deze massa's omgerekend worden naar hoogtes, wetende dat de horizontale oppervlakte beperkt is tot $4\,m^2$, dan hebben aambeeld en funderingsblok een hoogte van respectievelijk 0,318 m en 3 m. Deze hoogtes liggen aan de hoge kant vandaar dat er zal getracht worden deze hoogtes te verkleinen en na te gaan wat de invloed hiervan is op de verplaatsingen van het aambeeld en funderingsblok. Naast de maximale verplaatsingen is het tevens interessant de periode van de trilling van het aambeeld en funderingsblok te kennen. Figuur 2.13 en 2.14 tonen dat er in 0,5 s ongeveer 2,75 cycli doorlopen worden. Hieruit volgt dat de periode van de trilling gelijk is aan 0,5/2,75 of 0,181 s.

Door het veranderen van de parameters (m, k en c) kunnen verschillende simulaties uitgevoerd worden. Uiteindelijk zijn het slechts de piekwaarden van de verplaatsingen en de duur van de trilling die maatgevend zullen zijn, vandaar dat enkel nog deze piekwaarden gegeven worden. Tabel 2.1 toont de combinaties van de parameters waarmee de verschillende simulaties worden uitgevoerd en ook de overeenstemmende hoogtes van aambeeld en funderingsblok. Alle parameters met index 1 slaan op het aambeeld, die met index 2 slaan op het funderingsblok. Combinatie 1 is het bovenstaande voorbeeld.

	Invoergegevens								
Combinatie	m_i [kg]	m_1 [kg]	h_1 [m]	m_2 [kg]	h_2 [m]	k_1 [N/m]	k_2 [N/m]	c_1 [N.s/m]	c_2 [N.s/m]
1	500	10000	0,318	30000	3,0	50000000	50000000	250000	250000
2	500	10000	0,318	20000	2,0	50000000	50000000	250000	250000
3	500	6280	0,200	30000	3,0	50000000	50000000	250000	250000
4	500	6280	0,200	20000	2,0	50000000	50000000	250000	250000
5	500	6280	0,200	15000	1,5	50000000	50000000	250000	250000
6	500	4710	0,150	15000	1,5	50000000	50000000	250000	250000
7	500	3140	0,100	20000	2,0	50000000	50000000	250000	250000
8	500	3140	0,100	15000	1,5	50000000	50000000	250000	250000
9	500	3140	0,100	30000	3,0	50000000	50000000	250000	250000
10	500	6280	0,200	20000	2,0	50000000	50000000	200000	200000
11	500	10000	0,318	30000	3,0	25000000	25000000	250000	250000
12	500	6280	0,200	20000	2,0	25000000	25000000	250000	250000
13	500	6280	0,200	20000	2,0	50000000	50000000	125000	125000
14	500	6280	0,200	20000	2,0	25000000	25000000	125000	125000

Tabel 2.1: Invoergegevens v/d simulaties v/d methode behoud van impuls

Vervolgens worden voor iedere combinatie de piekwaarden in Tabel 2.2 samengevat. De kolom t staat voor de duur van de trilling. In de eerste negen combinaties worden enkel de massa's van het aambeeld en funderingsblok aangepast. Men kan duidelijk zien dat afnemende massa's, toenemende amplitudes tot gevolg hebben. In de laatste vijf combinaties worden ook de veer- en dempingsconstanten aangepast. De amplitude van de trilling stijgt wanneer de veerconstanten afnemen en de duur van de trilling stijgt wanneer de dempingsconstanten afnemen. Daarenboven merkt men ook een lichte stijging van de amplitude bij een daling van de dempingsconstanten op.

Piekwaarden							
Combinatie	z_1 [m]	z_2 [m]	v_1 [m/s]	v_2 [m/s]	a_1 [m/s^2]	a_2 [m/s^2]	t [s]
1	0,0129	0,0090	1,027	0,298	15,12	15,69	2,0
2	0,0134	0,0099	1,027	0,361	17,69	21,39	1,7
3	0,0150	0,0092	1,568	0,341	31,22	21,07	2,1
4	0,0154	0,0105	1,568	0,429	22,59	29,42	1,7
5	0,0159	0,0112	1,568	0,494	26,20	36,93	1,2
6	0,0171	0,0116	2,016	0,545	29,42	45,00	1,4
7	0,0186	0,0106	2,820	0,509	64,27	45,66	1,3
8	0,0190	0,0118	2,821	0,609	46,49	58,86	1,0
9	0,0183	0,0088	2,820	0,384	82,42	31,65	1,7
10	0.0160	0,0111	1,579	0,454	28,89	29,50	1,8
11	0,0171	0,0116	1,028	0,272	7,34	11,25	2,0
12	0,0202	0,0133	1,571	0,390	10,93	22,29	1,5
13	0,0171	0,0123	1,597	0,503	46,02	30,78	2,3
14	0,0231	0,0162	1,600	0,468	23,31	21,07	2,4

Tabel 2.2: Resultaten v/d simulaties v/d methode behoud van impuls

Op basis van deze gegevens wordt een keuze gemaakt voor de parameters. Er kan een discussie gevoerd worden over wat nu eigenlijk aanvaardbare verplaatsingen zijn. Omdat het in de toekomst de bedoeling zal zijn om metingen uit te voeren, moeten de verplaatsingen toch enigszins beperkt worden. Aan de andere kant is deze drop weight test van een zodanige grote omvang dat het gebruik van zeer gevoelige en nauwkeurige meetapparatuur (bv. rekstrookjes) uitgesloten is. Hoogstwaarschijnlijk zal in de toekomst met fotografische meetapparatuur (zoals een hoge snelheidscamera) gewerkt worden. Deze apparatuur wordt niet op het aambeeld bevestigd, maar op de trillingsvrije vloer naast het platform. Met deze beschouwingen in het achterhoofd lijkt een maximale verplaatsing van ongeveer 15 mm van het aambeeld aanvaardbaar, vandaar dat combinatie 4 wordt weerhouden, met:

$m_1 = 6.280\,\text{kg}$

$m_2 = 20.000\,\text{kg}$

$k_1 = 50.000.000\,\text{N/m}$

$k_2 = 50.000.000\,\text{N/m}$

$c_1 = 250.000\,\text{N.s/m}$

$c_2 = 250.000\,\text{N.s/m}$

2.5 Methode impactbelasting

In de vorige benadering wordt geen rekening gehouden met de impactbelasting. Het is te zeggen, de impactbelasting is niet gekend. In deze paragraaf wordt getracht het verloop van de impactbelasting te bepalen. Tevens wordt de reactie van het systeem op deze specifieke impactbelasting onderzocht. Opnieuw wordt er gewerkt met de bewegingsvergelijkingen, maar nu wordt ook de beweging van de impactor in rekening gebracht. Vandaar dat er gestart wordt met het beschrijven van de bewegingsvergelijkingen van de impactor.

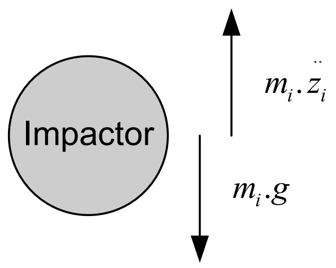
Er worden twee gevallen beschouwd, namelijk de vrije val en de beweging wanneer er contact is met het aambeeld. Om de bewegingsvergelijkingen te bepalen wordt het lichaam vrijgemaakt en worden de krachten beschouwd die erop werken.

2.5.1 De vrije val

In Figuur 2.19 stellen $m_i \cdot \ddot{z}_i$ en $m_i \cdot g$ respectievelijk de traagheidskracht en de zwaartekracht voor. Omdat er evenwicht zou heersen, moeten de zwaartekracht en de traagheidskracht eenzelfde absolute waarde hebben, maar tegengesteld zijn aan elkaar, zodat de bewegingsvergelijking omgevormd wordt tot

$$\ddot{z}_i = g \tag{2.38}$$

Men kan de snelheid van de impactor net voor de impact berekenen uit deze bewegingsvergelijking. Deze snelheid volgt ook uit vgl.(2.16) en bedraagt $\sqrt{2gh}$.

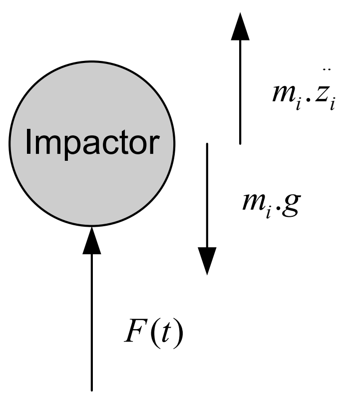


Figuur 2.19: Impactor vrijgemaakt tijdens de vrije val

2.5.2 Tijdens contact met het aambeeld

Naast de zwaartekracht en de traagheidskracht werkt nu ook de impactbelasting F(t) op de impactor, dit wordt geïllustreerd in Figuur 2.20. Deze impactbelasting varieert in de tijd. Door het evenwicht uit te schrijven wordt de bewegingsvergelijking

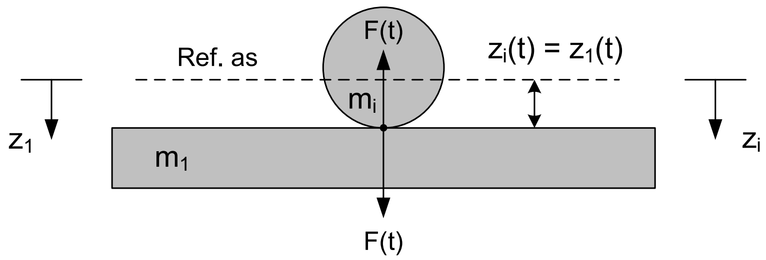
$$F(t) + m_i \cdot \ddot{z}_i = m_i \cdot g \tag{2.39}$$



Figuur 2.20: Impactor vrijgemaakt tijdens contact met het aambeeld

2.5.3 Filosofie

Tijdens de impact moet gedurende een oneindig klein tijdsinterval z_i gelijk zijn aan z_1 en dit onder een gelijke F(t). z_i moet gelijk zijn aan z_1 omdat verondersteld wordt dat beide lichamen onvervormbaar zijn en dus zeker niet in elkaar kunnen dringen. Volgens de derde wet van Newton (actie=reactie) moet dit gebeuren onder gelijke maar tegengestelde krachten. Dit wordt verduidelijkt in Figuur 2.21 waarin de toestand op het tijdstip t bekeken wordt.



Figuur 2.21: Filosofie bij het zoeken naar de impactbelasting

In feite is dit een iteratief proces waarin een F(t) vooropgesteld wordt en de differentiaalvergelijkingen geïntegreerd worden over een zeer klein tijdsinterval. Zolang z_i niet gelijk is aan z_1 past men F(t) aan, uiteindelijk vindt men F(t) die behoort bij dit tijdsinterval. Men zal beslist inzien dat dit een onbegonnen werk is om handmatig te doen. Vandaar dat er een programma wordt geschreven om de impactbelasting te bepalen.

2.5.4 Programma impactbelasting

Dit programma wordt geschreven in MATLAB 7.0.1 . Het volledige programma is te vinden in Bijlage A. Hier worden slechts de moeilijkheden behandeld die opgedoken zijn, tevens wordt de algemene vorm van het programma gegeven.

Moeilijkheden

Het eerste probleem dat opdook was dat het programma geen oplossing vond. Dit was te wijten aan het feit dat er geen indrukking, plastische vervorming, toegelaten werd. Om dit probleem te omzeilen, wordt er toch een beperkte indrukking toegelaten. Deze indrukking moet afhankelijk van de optredende impactbelasting $F(t)$ zijn, en wordt beschreven door de formule van Hertz [7]

$$w_0 = \sqrt[3]{\frac{2,25 \cdot (1-\nu^2)^2 \cdot F(t)^2}{E^2 \cdot r}} \tag{2.40}$$

met

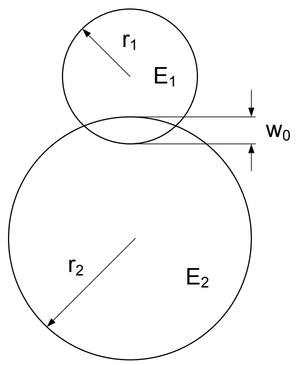
$E = \frac{2 \cdot E_1 \cdot E_2}{(E_1+E_2)}$ = de equivalente elasticiteitsmodulus met E_1 en E_2 de respectievelijke elasticiteitsmoduli van de twee lichamen

$r = \frac{1}{1/r_1+1/r_2}$ = de equivalente straal met r_1 en r_2 de respectievelijke stralen van de twee lichamen

ν de coëfficiënt van Poisson

$F(t)$ de impactbelasting op tijdstip t.

Figuur 2.22 verduidelijkt de verschillende parameters uit de formule van Hertz. Wegens het belang van deze formule, kan achtergrondinformatie gevonden worden in Bijlage B. In dit geval heeft slechts de impactor een straal, want het aambeeld is namelijk plat. Men kan dit oplossen door de straal van het aambeeld oneindig groot te veronderstellen.



Figuur 2.22: Principe formule van Hertz

Zonder de formule van Hertz is de voorwaarde voor het vinden van F(t)

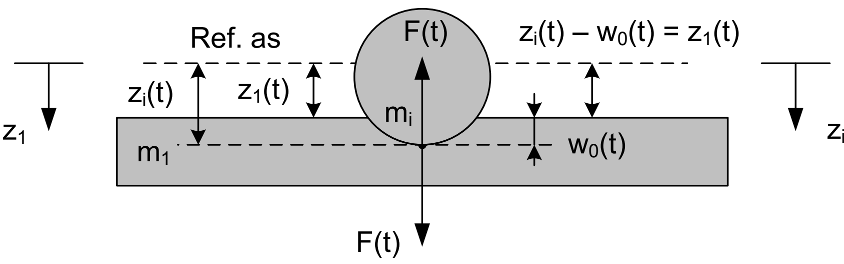
$$z_i = z_1$$

Met behulp van de formule van Hertz wordt deze voorwaarde

$$z_i - w_0 = z_1$$

die in Figuur 2.23 verduidelijkt wordt.

Het volgende waarop gelet moet worden is dat F(t) niet negatief wordt. Indien F(t) negatief is dan betekent dit dat het aambeeld en de impactor naar elkaar toe getrokken worden. Dus wanneer F(t) negatief is, is er geen contact meer tussen impactor en aambeeld. Er moet voor gezorgd worden dat F(t) gelijk gesteld wordt aan nul wanneer het contact verloren gaat. Wanneer de bewegingsvergelijkingen opgelost worden met F(t)=0 en met de beginsnelheid en -verplaatsing



Figuur 2.23: Voorwaarde met behulp van de formule van Hertz

gelijk aan deze van het vorige tijdsinterval dan is de exacte reactie op de impactbelasting gekend en moet de wet van behoud van impuls niet meer toegepast worden.

Algemene vorm

Het programma is opgebouwd uit enkele hoofdlussen. Deze lussen worden kort behandeld, zodat men een idee heeft hoe het programma opgebouwd is. Het programma uitleggen aan de hand van de MATLAB-file (Bijlage A) is onbegonnen werk, omdat men al vlug het overzicht verliest. Hieronder is de opbouw van het programma weergegeven. De cursief gedrukte tekst geeft uitleg over een tussenstap.

Er wordt gestart met het ingeven van de variabele parameters, hierdoor kan men in de toekomst gemakkelijk enkele parameters aanpassen.

Naast de reeds gekende parameters $(h, m_i, m_1, m_2, k_1, k_2, c_1, c_2)$ worden ook volgende waarden ingevoerd:

$j =$ De tijdsstap waarover geïntegreed wordt

$T =$ De totale duurtijd van het programma

Vervolgens dienen alle beginvoorwaarden te worden geïnitialiseerd. Omdat er gestart wordt vanuit de evenwichtstoestand, wordt alles gelijk gesteld aan nul, behalve de snelheid van de impactor.

$z_{i,0} = z_{1,0} = z_{2,0} = \dot{z}_{1,0} = \dot{z}_{2,0} = 0$

$\dot{z}_{i,0} = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$

Er dient nog een beginwaarde toegekend te worden aan de impactbelasting en aan het tijdstip, *dit louter om het programma te doen starten.*

$F(t)_0 = 1$

$F(t) = F(t)_0$

$t = j$

De onderstaande hoofdlus zorgt er voor dat het programma stopt wanneer T bereikt wordt.

While $(t \leq T)$

Oplossen van het stelsel bewegingsvergelijkingen van aambeeld en funderingsblok over tijdstap $\Delta t = j$.

$m_1 \cdot \ddot{z}_1 + k_1 \cdot (z_1 - z_2) + c_1 \cdot (\dot{z}_1 - \dot{z}_2) = F(t)$

$m_2 \cdot \ddot{z}_2 + k_2 \cdot z_2 + c_2 \cdot \dot{z}_2 - k_1 \cdot (z_1 - z_2) - c_1 \cdot (\dot{z}_1 - \dot{z}_2) = 0$

Hieruit volgen:

$\Rightarrow z_1(t), z_2(t), \dot{z}_1(t), \dot{z}_2(t), \ddot{z}_1(t), \ddot{z}_2(t)$

Oplossen van de bewegingsvergelijking van de impactor tijdens contact met het aambeeld over tijdstap $\Delta t = j$.

$F(t) + m_i \cdot \ddot{z}_i = m_i \cdot g$

Hieruit volgen:

$\Rightarrow z_i(t), \dot{z}_i(t), \ddot{z}_i(t)$

While $(z_i - z_1 \neq w_0)$

Nu moet afhankelijk van het verschil tussen z_i *en* z_1 *de impactbelasting vergroot of verkleind worden. Voor de eenvoud worden vergroten en verkleinen voorgesteld door respectievelijk het optellen of aftrekken van een fictieve waarde i.*

If $(z_1 + w_0 > z_i)$

$F(t) = F(t) - i$

End

Else

$F(t) = F(t) + i$

End

Zoals besproken moet ervoor gezorgd worden dat F(t) niet negatief wordt. Indien dit wel het geval is wordt $F(t)$ *gelijk gesteld aan nul en is er geen* *contact meer tussen impactor en aambeeld*

If $(F(t) > 0)$

Oplossen van het stelsel bewegingsvergelijkingen van aambeeld en funderingsblok over tijdstap $\Delta t = j$.

$m_1 \cdot \ddot{z}_1 + k_1 \cdot (z_1 - z_2) + c_1 \cdot (\dot{z}_1 - \dot{z}_2) = F(t)$

$m_2 \cdot \ddot{z}_2 + k_2 \cdot z_2 + c_2 \cdot \dot{z}_2 - k_1 \cdot (z_1 - z_2) - c_1 \cdot (\dot{z}_1 - \dot{z}_2) = 0$

Hieruit volgen:

$\Rightarrow z_1(t), z_2(t), \dot{z}_1(t), \dot{z}_2(t), \ddot{z}_1(t), \ddot{z}_2(t)$

Oplossen van de bewegingsvergelijking van de impactor tijdens contact met het aambeeld over tijdstap $\Delta t = j$.

$F(t) + m_i \cdot \ddot{z}_i = m_i \cdot g$

Hieruit volgen:

$\Rightarrow z_i(t), \dot{z}_i(t), \ddot{z}_i(t)$

End

Else

In dit geval is F(t) negatief en is het contact tussen impactor en aambeeld verbroken. Vanaf hier berekent het programma de responsie (vrije trilling) op de impactbelasting. Tevens wordt de beweging van de impactor ook opgevolgd.

While $(z_1 \neq z_i)$

Oplossen van het stelsel bewegingsvergelijkingen van aambeeld en funderingsblok waarbij F(t)=0 over tijdstap $\Delta t = j$.

$m_1 \cdot \ddot{z}_1 + k_1 \cdot (z_1 - z_2) + c_1 \cdot (\dot{z}_1 - \dot{z}_2) = 0$

$m_2 \cdot \ddot{z}_2 + k_2 \cdot z_2 + c_2 \cdot \dot{z}_2 - k_1 \cdot (z_1 - z_2) - c_1 \cdot (\dot{z}_1 - \dot{z}_2) = 0$

Hieruit volgen:

$\Rightarrow z_1(t), z_2(t), \dot{z}_1(t), \dot{z}_2(t), \ddot{z}_1(t), \ddot{z}_2(t)$

Oplossen van de bewegingsvergelijking van de impactor tijdens de vrije val over tijdstap $\Delta t = j$.

$\ddot{z}_i = g$ *Hieruit volgen:*

$\Rightarrow z_i(t), \dot{z}_i(t), \ddot{z}_i(t)$

Nu moeten per tijdsstap de oplossingen van de bewegings-

vergelijking weggeschreven worden en moet het tijdstip verhoogd worden

Wegschrijven: $z_i(t), z_1(t), z_2(t), \dot{z}_i(t), \dot{z}_1(t), \dot{z}_2(t), \ddot{z}_i(t), \ddot{z}_1(t), \ddot{z}_2(t)$

$t = t + j$

$F(t) = F(t)_0$

End

End

End

Wanneer op het einde van de lus de juiste F(t) gevonden is, dan worden F(t) en de andere parameters weggeschreven. Tevens worden de beginvoorwaarden aangepast en het tijdstip verhoogt zodat aan de nieuwe lus gestart kan worden.

Wegschrijven: $F(t), z_i(t), z_1(t), z_2(t), \dot{z}_i(t), \dot{z}_1(t), \dot{z}_2(t), \ddot{z}_i(t), \ddot{z}_1(t), \ddot{z}_2(t)$

$z_{i,0} = z_i(t)$

$z_{1,0} = z_1(t)$

$z_{2,0} = z_2(t)$

$\dot{z}_{i,0} = \dot{z}_i(t)$

$\dot{z}_{1,0} = \dot{z}_1(t)$

$\dot{z}_{2,0} = \dot{z}_2(t)$

$\ddot{z}_{i,0} = \ddot{z}_i(t)$

$\ddot{z}_{1,0} = \ddot{z}_1(t)$

$\ddot{z}_{2,0} = \ddot{z}_2(t)$

$t = t + j$

End

2.5.5 Analyse resultaten

Het programma rekent met de parameters die gebruikt worden bij de methode van behoud van impuls. De desbetreffende parameters zijn:

$h = 25\,\mathrm{m}$

$m_i = 500\,\mathrm{kg}$

$m_1 = 10.000\,\mathrm{kg}$

$m_2 = 30.000\,\mathrm{kg}$

$k_1 = 50.000.000\,\mathrm{N/m}$

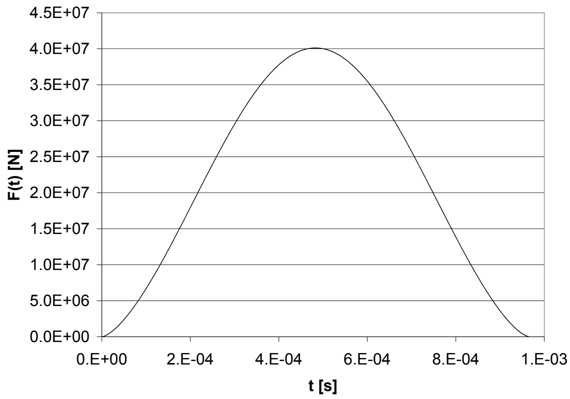
$k_2 = 50.000.000\,\mathrm{N/m}$

$c_1 = 250.000\,\mathrm{N.s/m}$

$c_2 = 250.000\,\mathrm{N.s/m}$

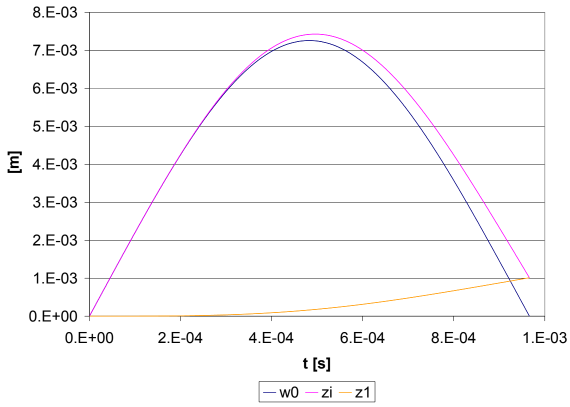
De grafieken hieronder tonen de resultaten. Eerst worden alle grafieken gegeven van het systeem tijdens de impact en daarna die van na de impact. Na de impact is het systeem in vrije trilling. Deze grafieken zouden sterke gelijkenissen moeten hebben met de grafieken die volgen uit de methode van behoud van impuls.

Figuur 2.24 toont de impactbelasting, de piekwaarde bedraagt 40 MN en grijpt gedurende ongeveer 0,001 s aan. Na deze tijd verdwijnt het contact tussen impactor en aambeeld en valt de impactbelasting terug op 0 N. De curve van deze belasting benadert sterk de vorm van een sinusfunctie, wanneer de numerieke berekeningen worden uitgevoerd (Hoofdstuk 3) zal de belasting gemodelleerd worden als een sinus.



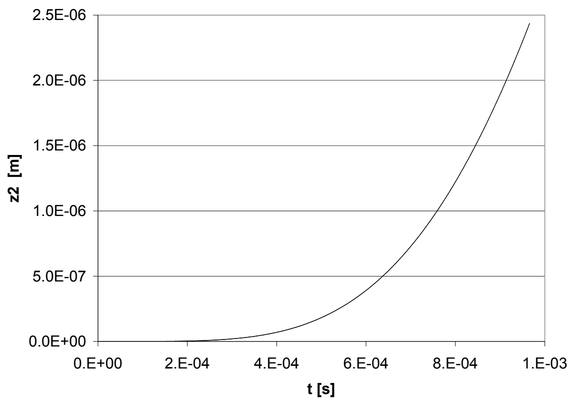
Figuur 2.24: Impactbelasting

Uit het eerder besproken programma volgt dat de verplaatsing van de impactor gelijk is aan de som van de elastische indrukking en de verplaatsing van het aambeeld. Figuur 2.25 toont duidelijk dat tijdens de impact de verplaatsing van de impactor (z_i) grotendeels te wijten is aan de elastische indrukking (w_0) en slechts gedeeltelijk door de verplaatsing van het aambeeld (z_1). De maximale verplaatsing van de impactor tijdens de impact bedraagt ongeveer 7,5 mm. Op het moment dat het contact tussen de impactor en het aambeeld verdwijnt is de verplaatsing van de impactor gelijk aan de verplaatsing van het aambeeld en bedraagt ongeveer 1 mm. Op dat ogenblik is de elastische indrukking terug gevallen op 0 mm, dit is echter niet realistisch en is het gevolg van de formule van Hertz. In realiteit zullen er ten gevolge van de impact plastische vervormingen (indrukking) ontstaan, die na de impact niet meer zullen verdwijnen.



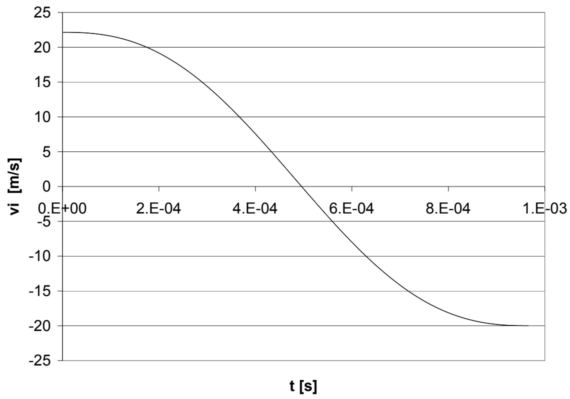
Figuur 2.25: w_0 de indrukking, z_i verplaatsing impactor, z_1 verplaatsing aambeeld - tijdens de impact

In Figuur 2.26 kan men de verplaatsing van het funderingsblok tijdens de impact zien. Deze curve kent hetzelfde verloop als z_1 in Figuur 2.25. Als men kijkt naar de maximale waarde, namelijk 0,0025 mm, dan is dit verwaarloosbaar.



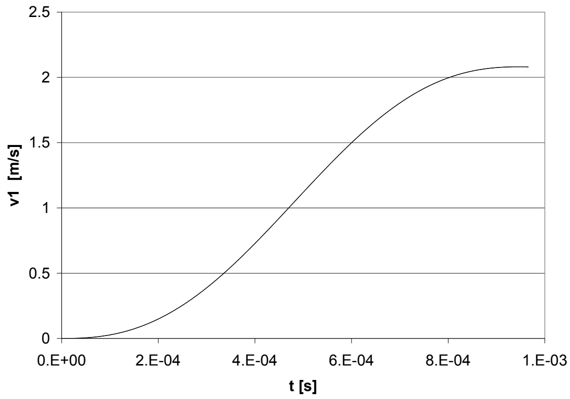
Figuur 2.26: Verplaatsing funderingsblok tijdens impact

Figuur 2.27 geeft het verloop van de snelheid van de impactor tijdens de impact. De impactor bereikt het aambeeld na de vrije val met een snelheid van 22,15 m/s. Na 0,0005 s bedraagt de snelheid nul en verandert de beweging van neerwaarts naar opwaarts. Op dit tijdstip kan tevens de maximale verplaatsing (z_i) gevonden worden in Figuur 2.25. Bij het verdwijnen van het contact heeft de impactor een opwaartse snelheid van 20 m/s. De impactor bevindt zich nu in vrije val, dit is een eenparig versnelde beweging met een versnelling gelijk aan g.



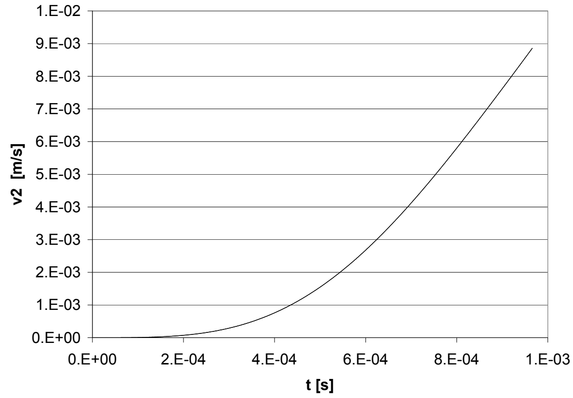
Figuur 2.27: Snelheid impactor tijdens impact

Figuur 2.28 en 2.29 tonen respectievelijk het verloop van de snelheid van het aambeeld en van het funderingsblok tijdens de impact. Er wordt op het einde van de impact respectievelijk een snelheid van 2,1 m/s en 0,009 m/s bereikt. De grafieken hebben een verschillende vorm, dit is te wijten aan het feit dat de funderingsblok naijlt op het aambeeld.

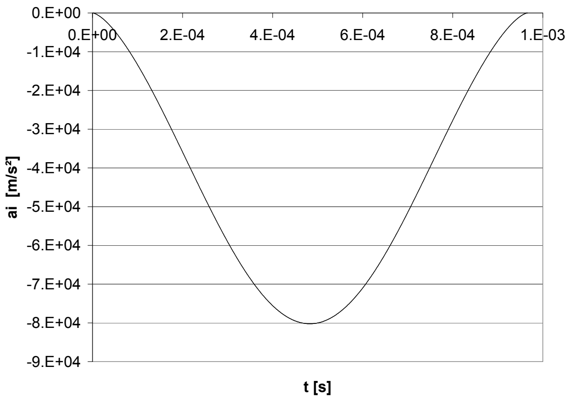


Figuur 2.28: Snelheid aambeeld tijdens impact

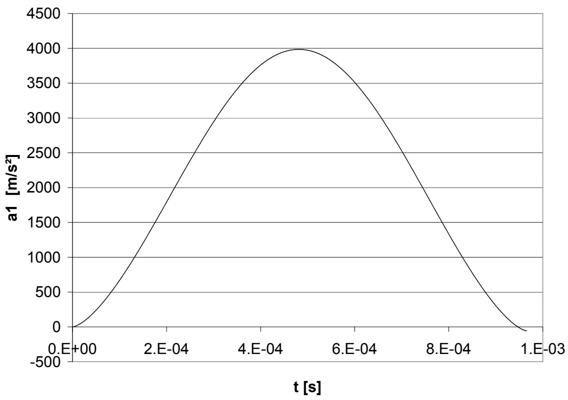
In Figuur 2.30,2.31 en 2.32 wordt het verloop van de versnelling van respectievelijk de impactor, het aambeeld en het funderingsblok tijdens de impact gegeven. Deze grafieken zijn afgeleid van de eerder besproken snelheidsgrafieken.



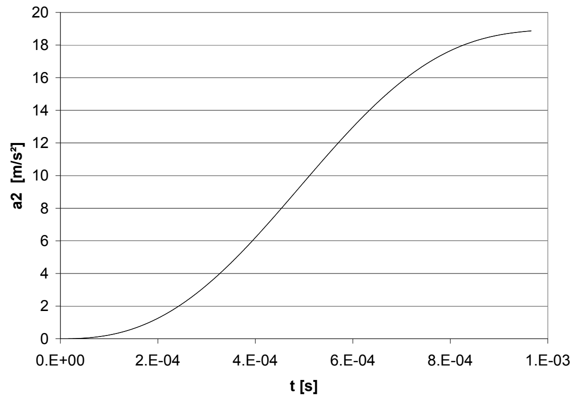
Figuur 2.29: Snelheid funderingsblok tijdens impact



Figuur 2.30: Versnelling impactor tijdens impact

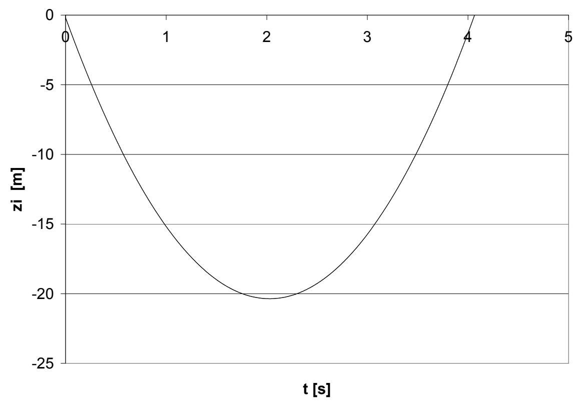


Figuur 2.31: Versnelling aambeeld tijdens impact



Figuur 2.32: Versnelling funderingsblok tijdens impact

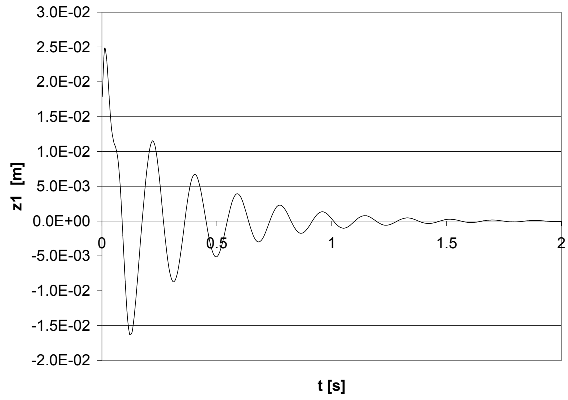
Figuur 2.33 geeft de verplaatsing van de impactor na de impact. De impactor wordt teruggekaatst tot een hoogte van ongeveer 20 m en bereikt het aambeeld terug na 4 s. Men kan op Figuur 2.34 zien dat de trilling dan reeds uitgedempt is, dit betekent dat er opnieuw een impact zal volgen en dat het systeem op dezelfde manier zal reageren als hier beschreven.



Figuur 2.33: Verplaatsing impactor na impact

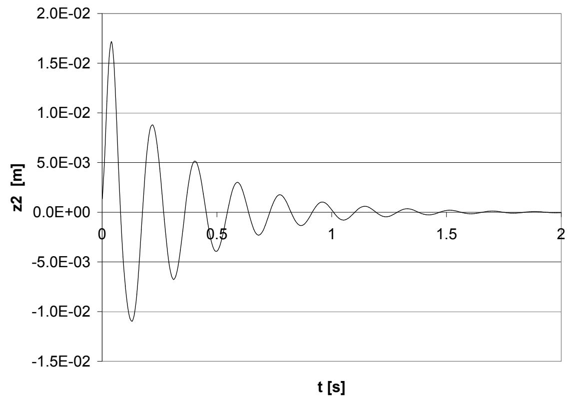
In Figuur 2.34 ziet men de responsie van het aambeeld op de impact. Kort na de impact neemt de verplaatsing nog toe van 1 mm tot 25 mm. Vervolgens neemt deze verplaatsing zeer snel af, na 2 s is de trilling volledig uitgedempt. De snelle demping is het gevolg van de dempingskarakteristieken van de elastische lagen. De dempingsconstante werd echter vrij gekozen. Tevens ziet men ook dat de verplaatsing negatief wordt, dit betekent dat het aambeeld boven zijn evenwichtspositie komt te liggen.

Vervolgens toont Figuur 2.35 de responsie van het funderingsblok op de impact. De maximale



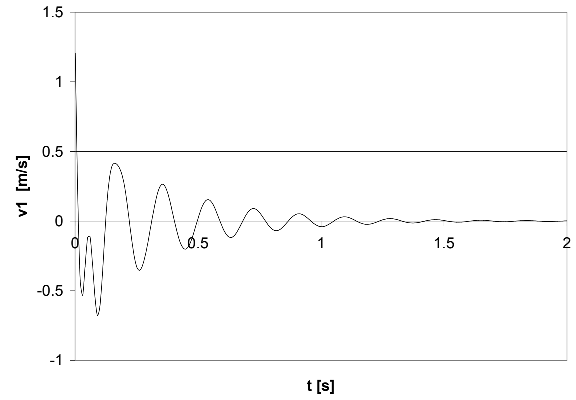
Figuur 2.34: Verplaatsing aambeeld na impact

verplaatsing is ongeveer 17 mm, dit is 8 mm minder dan de maximale verplaatsing van het aambeeld. Dit verschil is te wijten aan de dempende werking van de elastische laag, ook in dit opzicht vervult deze perfect zijn taak. Tevens zorgt de elastische laag er opnieuw voor dat de trilling na 2 s volledig is uitgedempt. Uit de Figuren 2.34 en 2.35 kan men, net zoals bij de methode behoud van impuls, zien dat er in 0,5 s ongeveer 2,75 cycli doorlopen worden en dit geeft opnieuw een periode van 0,181 s.

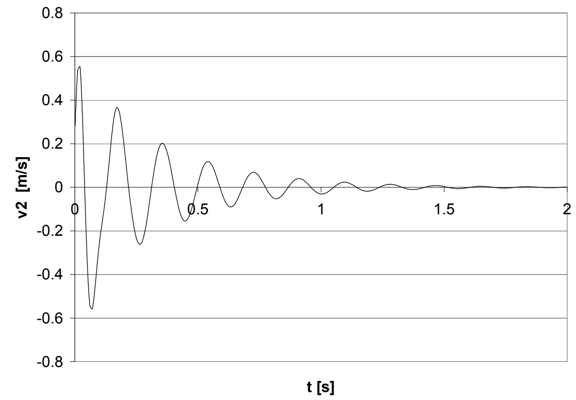


Figuur 2.35: Verplaatsing funderingsblok na impact

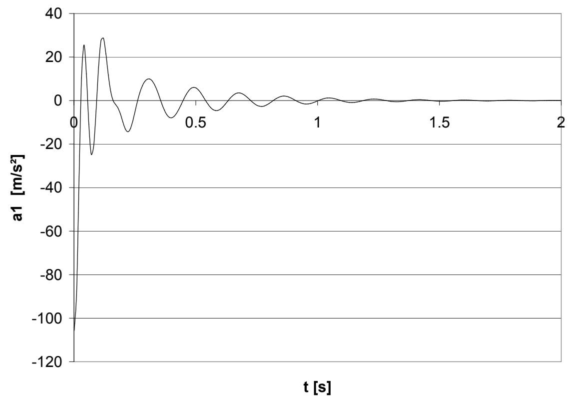
Voor de volledigheid worden nog de grafieken van de snelheid en de versnelling van het aambeeld en het funderingsblok na de impact gegeven. Beide type grafieken worden afgeleid van de grafieken van de verplaatsingen.



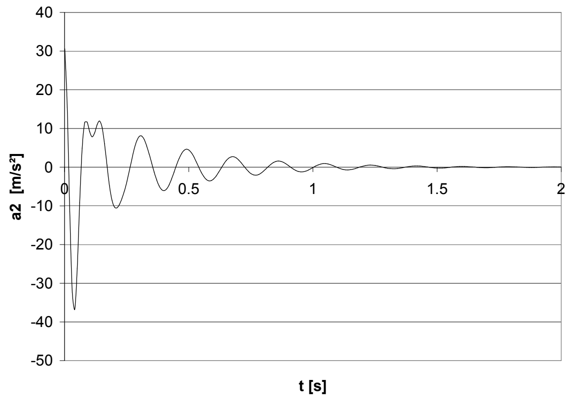
Figuur 2.36: Snelheid aambeeld na impact



Figuur 2.37: Snelheid funderingsblok na impact



Figuur 2.38: Versnelling aambeeld na impact



Figuur 2.39: Versnelling funderingsblok na impact

Echter net zoals bij de methode van behoud van impuls behoren deze resultaten niet bij de optimale oplossing. De berekeningen worden opnieuw uitgevoerd met de parameters uit de zogenaamde optimale oplossing (combinatie 4) uit de methode van behoud van impuls (paragraaf 2.4). Deze parameters zijn:

$m_1 = 6.280\,\mathrm{kg}$

$m_2 = 20.000\,\mathrm{kg}$

$k_1 = 50.000.000\,\mathrm{N/m}$

$k_2 = 50.000.000\,\mathrm{N/m}$

$c_1 = 250.000\,\mathrm{N.s/m}$

$c_2 = 250.000\,\mathrm{N.s/m}$

Het is weinig zinvol om opnieuw alle grafieken van de resultaten van deze berekeningen te tonen, want de vorm van de grafieken is volledig gelijklopend met de behandelde grafieken. Enkel de piekwaarden zijn verschillend. De piekwaarden horend bij combinatie 4 zijn:

- De impactbelasting bereikt een piekwaarde van 40 MN en het contact verdwijnt na 0,001 s. Dus dit verschilt niet van het eerder beschouwde geval.
- De maximale verplaatsing van de impactor tijdens de impact bedraagt 7,5 mm en is terug hoofdzakelijk te wijten aan de elastische indrukking. Er is opnieuw weinig verschil met het eerder beschouwde geval.
- Op het eind van de impact hebben het aambeeld en de impactor een verplaatsing van 1,5 mm, dat is 0,5 mm meer dan het vorige voorbeeld. Opnieuw is de elastische indrukking terug nul op het eind van de impact.

- Pas na de impact worden de verschillen door het veranderen van de parameters duidelijk. De maximale verplaatsing van het aambeeld na de impact bedraagt 30 mm, dit is 5 mm meer dan in het vorige geval. De trilling is na 1,5 s volledig uitgedempt.

- De maximale verplaatsing van het funderingsblok na de impact bedraagt 20 mm, dit is 3 mm meer dan in het vorige geval. Ook deze trilling is binnen de 1,5 s volledig uitgedempt.

- Opmerkelijk is ook dat de impactor na de impact tot 18 m wordt teruggekaatst, dit is 2 m minder dan in het vorige geval.

Deze resultaten wijken sterk af van deze bij de methode van behoud van impuls, sterker nog, de piekwaarden zijn zo goed als verdubbeld. Combinatie 4 lijkt met deze rekenmethode bijlange niet meer optimaal. De oorzaken van deze verschillen worden later behandeld (paragraaf 2.7).

Om nu te stellen dat combinatie 4 niet meer optimaal is, is sterk uitgedrukt, want voorheen werd telkens een harde impact gesimuleerd. Met een harde impact wordt bedoelt dat de impactor rechtstreeks op het aambeeld zal terecht komen. Uiteraard is dit niet het doel van de uiteindelijke proefopstelling. Wanneer de impactor toch rechtstreeks op het aambeeld komt, dan zal dat eerder accidenteel zijn. In dit geval moet het crash platform toch in staat zijn om deze harde impact veilig over te dragen naar de fundering, echter in dit geval zijn de piekwaarden van de verplaatsingen van secundair belang.

De werkelijke proeven, waarbij de impactor eerst op het proefstuk terecht komt en daarna pas op het aambeeld, worden vanaf nu een zachte impact genoemd. Doordat de impactor eerst op het proefstuk terecht komt, wordt de impact al in ruime mate gedempt, vandaar de benaming zacht. Het is eerder deze gebruikstoestand die zal bepalen of combinatie 4 nog steeds optimaal is. Het is echter niet vanzelfsprekend om deze zachte impact te modelleren. Men kan echter via een vereenvoudiging toch deze zachte impact simuleren met de methode impactbelasting. Als men kijkt naar de formule van Hertz in vgl.(2.40), meer bepaald naar de definitie van E, namelijk

$$E = \frac{2 \cdot E_1 \cdot E_2}{(E_1 + E_2)}$$

dan kan men de zachte impact simuleren als een verschil in elasticiteitsmoduli. Inderdaad de impact tussen een vervormbaar lichaam (kleine E) en een stijf lichaam (grote E) zorgt ervoor dat er energie verloren gaat in de vervorming van het lichaam met kleinere E en er bijgevolg minder energie overgedragen wordt naar het crash platform (stijf, grote E). Er kan ingezien worden dat dit een sterke vereenvoudiging van de werkelijkheid is. Maar om de reactie van het crash platform op deze zogenaamde zachte impact te begroten is deze vereenvoudiging zeker te rechtvaardigen.

Er wordt een simulatie van de zachte impact uitgevoerd door een verschil in elasticiteitsmoduli van een factor 1.000. De elasticiteitsmodulus van het aambeeld heeft een waarde E_1=210.000 MPa, de elasticiteitsmodulus van de impactor wordt dan E_2=210 MPa. Dit resulteert in een equivalente elasticiteitsmodulus E=420 MPa. Met deze waarde voor E en met de andere parameters van het algemene voorbeeld en van combinatie 4 worden simulaties uitgevoerd. De piekwaarden die hierbij voorkomen zijn:

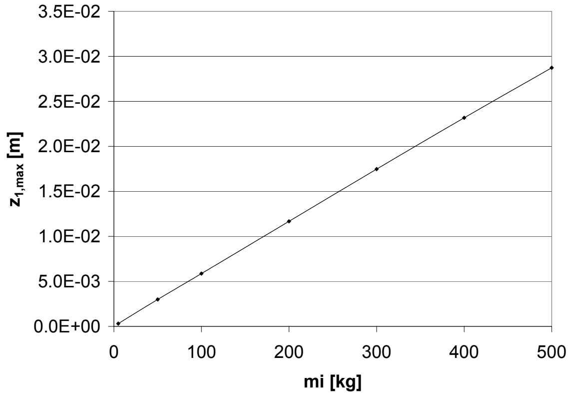
- De impactbelasting bereikt in beide gevallen een piekwaarde van 3,3 MN en het contact verdwijnt na 0,0115 s. In vergelijking met de harde impact is de piekwaarde ruim 10 keer kleiner, maar daarentegen grijpt de impactbelasting 10 keer langer aan.
- De maximale verplaatsing van de impactor tijdens de impact bedraagt voor het algemeen voorbeeld 89,4 mm en 92,5 mm voor combinatie 4 waarvan respectievelijk 87,4 mm en 86,5 mm te wijten zijn aan de indrukking. Deze grote verplaatsingen zijn enkel het gevolg van de verlaagde elasticiteitsmoduli in de formule van Hertz.
- Op het einde van de impact hebben het aambeeld en de impactor een verplaatsing van respectievelijk 11 mm en 16 mm. Deze verplaatsingen zijn 10 maal groter dan bij de harde impact. Dit komt doordat de impactbelasting 10 maal langer aangrijpt dan bij de harde impact, niettegenstaande de piekwaarden 10 maal kleiner zijn.
- De maximale verplaatsingen van het aambeeld na de impact zijn respectievelijk 24,6 mm en 28,7 mm. Deze waarden zijn gelijklopend met deze van de harde impact, dit betekent dat de formule van Hertz geen invloed heeft op de maximale verplaatsingen. Na respectievelijk 2 s en 1,3 s zijn deze trillingen volledig uitgedempt.
- De maximale verplaatsingen van het funderingsblok na de impact bedragen respectievelijk 16,95 mm en 19,19 mm, ook hier heeft de formule van Hertz geen invloed op deze verplaatsingen. Deze trillingen zijn ook na respectievelijk 2 s en 1,3 s volledig uitgedempt.
- De impactor wordt respectievelijk tot 20,68 m en 18,79 m teruggekaatst, deze waarden komen eveneens overeen met deze van de harde impact.

Men kan besluiten dat de formule van Hertz enkel op de impactbelasting invloed heeft. In de zogenaamde gebruikstoestand zijn de piekwaarden van de verplaatsingen even groot als in het accidenteel geval, dit komt omdat er reeds een grote verplaatsing ontstaat tijdens de impact ten gevolge van de tien maal langer aangrijpende impactbelasting. Als het algemene voorbeeld vergeleken wordt met combinatie 4, dan valt er op dat met een relatief grote toename van de massa's slechts een beperkte afname van de verplaatsingen gepaard gaat. Het eerder gekozen criterium met betrekking tot de keuze van de meest optimale combinatie, namelijk een maximaal toelaatbare verplaatsing van 15 mm, lijkt bij deze nogal streng gekozen. Vooraleer combinatie 4 volledig af te schrijven wordt eerst de invloed van de massa van de impactor van naderbij onderzocht. Het is nogal evident dat men in de toekomst niet steeds een massa van 500 kg zal gebruiken om de proeven uit te voeren. Sterker nog: dit zal eerder zeldzaam zijn. Vandaar dat er verschillende simulaties worden uitgevoerd met een variërende massa van de impactor. Er wordt steeds een zachte impact met de parameters van combinatie 4 gesimuleerd. Tabel 2.3 vat de piekwaarden van de simulaties samen. In de kolommen die de duur weergeven wordt bij de kolom F_t de duur van de impactbelasting bedoeld, de andere kolom geeft de tijd die de impactor nodig heeft om na het terugkaatsen het aambeeld terug te bereiken.

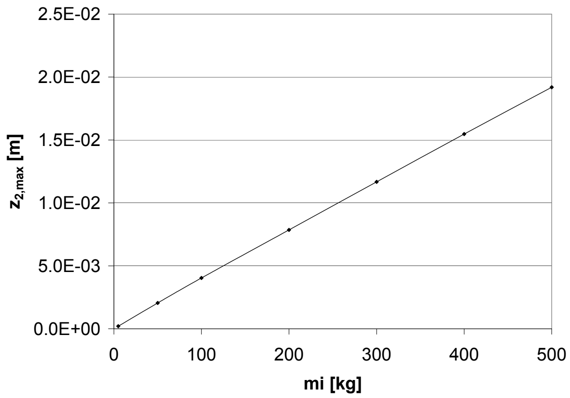
Invloed van de massa van de impactor							
	Maxima			Net na de impact		Duur	
m_i [kg]	F(t) [N]	z_1 [m]	z_2 [m]	$z_{1,0}$ [m]	$v_{1,0}$ [m/s]	F(t) [s]	Totaal [s]
5	215279	0,000306	0,000208	0,000032	0,033588	0,00187	4,43188
50	858558	0,002993	0,002050	0,000773	0,310808	0,00470	4,41471
100	1296919	0,005866	0,004038	0,001971	0,589949	0,00618	4,35619
200	1950441	0,011666	0,007857	0,004949	1,088414	0,00812	4,23813
300	2467733	0,017474	0,011677	0,008373	1,527758	0,00951	4,11952
400	2909395	0,023168	0,015473	0,012073	1,920411	0,01063	4,02064
500	3300129	0,028733	0,019193	0,015950	2,274636	0,01158	3,91159

Tabel 2.3: Invloed v/d massa v/d impactor op de resultaten bij combinatie 4 en zachte impact

De piekwaarde van de impactbelasting is groter naarmate de massa van de impactor stijgt. Ook de maximale verplaatsingen van aambeeld en funderingsblok stijgen bij toenemende massa van de impactor. Hoe kleiner de massa van de impactor, hoe langer het duurt tot dat de impactor na het terugkaatsen het aambeeld terug bereikt. Dit betekent dat de impactor hoger teruggekaatst wordt naarmate zijn massa daalt. Als de maximale verplaatsingen van aambeeld en funderingsblok uitgezet worden ten opzichte van de massa van de impactor, dan worden respectievelijk Figuur 2.40 en 2.41 verkregen.



Figuur 2.40: Maximale verplaatsing aambeeld t.o.v. de massa van de impactor



Figuur 2.41: Maximale verplaatsing funderingsblok t.o.v. de massa van de impactor

Er blijkt een praktisch lineair verband te bestaan tussen beide grootheden voor massa's van de impactor tot 500 kg, over het verder verloop bij hogere massa's kan geen uitspraak gedaan worden. Tussen de andere grootheden bestaat dit verband niet. De lineaire verbanden kunnen als volgt uitgedrukt worden:

- Tussen $z_{1,max}$ en m_i: $z_{1,max} = 5,75 \cdot 10^{-5} \cdot m_i$
- Tussen $z_{2,max}$ en m_i: $z_{2,max} = 3,83 \cdot 10^{-5} \cdot m_i$

Indien de grens van 15 mm voor het aambeeld toch aangehouden wordt, dan moet de massa van de impactor beperkt worden tot 260 kg bij de parameters van combinatie 4. Het lineair verband wiskundig verklaren is bijna onmogelijk omdat de maximale waarden van de verplaatsingen van het aambeeld en funderingsblok volgen uit de bewegingsvergelijkingen, terwijl de massa van de impactor enkel verwerkt zit in de formule voor het bepalen van de beginsnelheid van het aambeeld $v_{1,0}$. Deze beginsnelheid is op zijn beurt een beginvoorwaarde voor het oplossen van de bewegingsvergelijkingen.

2.6 Bespreking elastische lagen

In paragraaf 2.2.2 werd reeds een kwalitatieve keuze voor de elastische lagen gemaakt. Hier worden op basis van de uitgevoerde berekeningen de elastische lagen verder gespecificeerd. Tijdens de berekeningen werden het rubber en de luchtveren gemodelleerd als een veer-demper systeem met een veerconstante k en een dempingsconstante c. Er zal een keuze gemaakt worden op basis van de parameters van combinatie 4, meer bepaald een veerconstante k=50.000.000 N/m en een dempingsconstante c=250.000 N.s/m. Er bleek al vlug dat rubber en luchtveren niet gedefinieerd worden aan de hand van een k en c. Echter met de gegevens die wel te vinden zijn in de literatuur en de catalogussen van de producenten kan een k berekend worden, maar c zal proefondervindelijk bepaald moeten worden.

2.6.1 Rubberlaag

In de literatuur [5] wordt rubber gedefinieerd aan de hand van een elasticiteitsmodulus E, uit deze E en de te bereiken k kan de dikte [2] van de rubberlaag berekend worden met vgl.(2.41):

$$k = \frac{E \cdot A}{d_p} \tag{2.41}$$

Waarin

E = Young modulus van de elastische laag

A = oppervlakte van de elastische laag

d_p = dikte van de elastische laag (pad)

De dikte van de rubberlaag zal toenemen met een toenemende E, het is dus beter om een slapper rubber (dus een lage E) te kiezen. Vandaar de keuze voor een rubber met E=2.000.000 Pa. Deze E in combinatie met k=50.000.000 N/m geeft een dikte van 16 cm. Deze dikte lijkt op het eerste gezicht aanvaardbaar, daar in de praktijk grotere dikten kunnen geproduceerd worden, zoals bij oplegtoestellen voor bruggen.

2.6.2 Luchtveren

Er wordt op basis van de catalogus van luchtveren van Firestone (zie Bijlage C) een keuze gemaakt voor het type luchtveer. Met de gegevens uit deze catalogus kan bij ieder type een veerconstante k begroot worden met vgl.(2.42) [8]:

$$k = \frac{n \cdot P \cdot S^2}{V} \tag{2.42}$$

Met

P = de absolute gasdruk in de luchtveer

V = het volume van het gas overeenkomstig met de heersende gasdruk

n = de relatieve warmtecoëfficiënt, voor lucht is dit 1,4

S = de gemiddelde oppervlakte van de doorsnede van de luchtveer bij de heersende gasdruk

Vanwege de hoge veerconstante k=50.000.000 N/m, is het praktisch onmogelijk om slechts één luchtveer te plaatsen. Daarvoor zou een extreem grote luchtveer, met een zeer hoge heersende gasdruk vereist zijn, dit zou economisch niet te verantwoorden zijn. Dit probleem kan opgelost worden door meerdere kleinere luchtveren naast elkaar te plaatsen. Dit noemt men ook wel een parallelle schikking van de luchtveren. De resulterende veerconstante van parallel geplaatste veren wordt berekend met vgl.(2.43):

$$k_{res} = n \cdot k \tag{2.43}$$

Met

n = het aantal parallel geplaatste veren

k = de veerconstante van een individuele veer

Naast het bereiken van de berekende veerconstante moeten de luchtveren ook in staat zijn om de statische belasting te dragen. De statische belasting bestaat uit het gewicht van het aambeeld, rubberlaag en funderingsblok. In totaal bedraagt deze belasting 267 kN.

Vanwege de afmetingen van het crash platform wordt het aantal luchtveren beperkt tot 16 stuks die in een rooster van 4×4 geplaatst worden. Uit de catalogus blijkt dat voor kleine verplaatsingen (<76,2 mm) best het type 'single convolution' gekozen wordt. De berekeningen worden samengevat in Tabel 2.4, de afmetingen en de kracht (bij *1 inch stroke*) bij ieder type volgen uit Bijlage C. Met deze gegevens wordt bij ieder type de veerconstante k berekend, vervolgens berekent men het aantal veren n nodig om de resulterende veerconstante k=50.000.000 N/m te bereiken. En ten slotte wordt de totale draagkracht F_{totaal} van de n veren bepaald.

Uit de tabel blijkt dat een ontwerp van 16 veren van het type 19 aan alle eisen voldoet, er is zelf nog een overschot aan draagkracht (267 kN<343 kN). De indrukking door de statische belasting is minder dan 25,4 mm, uit de catalogus volgt dat er dan nog 63,5 mm overschiet voor de dynamische indrukking, wat ruim voldoende is. Ook constructief is er geen enkel probleem, want een rij van 4 veren beslaat slechts 131 cm van de 200 cm beschikbare ruimte.

Bepalen type en aantal 'single convolution' luchtveren bij P=62 bar en *1 inch stroke*								
Type	$Ø_{max}$	$Ø_{gem}$	S	Hoogte	F	k	n	F_{totaal}
	[m]	[m]	[m^2]	[m]	[N]	[N/m]		[kN]
16	0,15240	0,11430	0,01026	0,05842	3044	1517208	33,0	100
16ST	0,13716	nvt	nvt	0,05842	2949	nvt	nvt	nvt
131	0,16510	0,11430	0,01026	0,07874	4280	1125670	44,4	190
110	0,21082	0,11430	0,01026	0,10414	6626	851116	58,7	389
116	0,23114	0,13487	0,01429	0,10414	8528	1185095	42,2	360
116-1	0,24384	0,13487	0,01429	0,13208	9448	934401	53,5	506
115	0,25654	0,16027	0,02018	0,10414	11255	1673488	29,9	336
19	0,32766	0,22860	0,04104	0,11430	21305	3101847	16,1	343
19-.75	0,34290	0,22860	0,04104	0,12446	22320	2848635	17,6	392
113	0,38608	0,28727	0,06482	0,12192	31387	4592316	10,9	342
113-1	0,40386	0,28727	0,06482	0,14224	34431	3936271	12,7	437
153-2	0,45974	nvt	nvt	0,16002	41644	nvt	nvt	nvt
119**	0,44196	0,35077	0,09664	0,13208	44481	6320215	7,9	352
121**	0,51562	0,41910	0,13795	0,11684	62141	10199007	4,9	305
126**	0,56896	0,48260	0,18292	0,13716	82400	11520233	4,3	358
138-1.5	0,70866	0,59690	0,27983	0,16002	137692	15105774	3,3	456
148-1	0,94996	0,83007	0,54115	0,16002	248245	29212677	1,7	425

Tabel 2.4: Bepalen van het type luchtveer

2.7 Vergelijking methoden

In dit hoofdstuk zijn verscheidene methodes aangewend om de responsie van het crash platform op de impactbelasting te beschrijven. Het lijkt daarom aangewezen om de verschillende methodes naast elkaar te leggen en te vergelijken. Bovendien wordt getracht een antwoord te geven op de vraag welke methode het meest aangewezen is voor het bepalen van de responsie van het systeem in vrije trilling en welke methode kan gebruikt worden voor het bepalen van de impactbelasting.

2.7.1 Beschrijving van de verschillende methodes

De drie gebruikte methodes zijn:

- Methode voor impact machines
- Methode van behoud van impuls
- Methode impactbelasting

Methode voor impact machines

Dit is een methode beschreven in de literatuur [2] voor het ontwerp van impact machines en werd toegepast op de valopstelling. Het crash platform wordt omgevormd tot een model met twee vrijheidsgraden waarbij er geen rekening gehouden wordt met demping. De maximale verplaatsingen van het aambeeld en het funderingsblok worden geschreven in functie van de natuurlijke frequenties ω_{n1} en ω_{n2}, de limiet natuurlijke frequentie ω_{nl1} en de beginsnelheid van het aambeeld $v_{1,0}$. Het is deze beginsnelheid van het aambeeld die in de verschillende methodes een belangrijke rol zal vervullen. Er wordt namelijk vanuit gegaan dat het systeem met twee vrijheidsgraden in vrije trilling is en waarbij aan het aambeeld een beginsnelheid wordt toegekend, gegeven door

$$v_{1,0} = \frac{1+e}{1+\frac{m_1}{m_i}} \cdot v_{i,0} \tag{2.44}$$

De beginsnelheid $v_{1,0}$ is functie van $v_{i,0}$, de snelheid van de impactor net voor de impact, en van de coëfficiënt e. Overigens zijn m_1 de massa van het aambeeld en m_i de massa van de impactor. De snelheid van de impactor net voor de impact is afhankelijk van de valhoogte want $v_{i,0} = \sqrt{2gh}$ en aangezien de valhoogte 25 m bedraagt ligt deze term vast. De massa's van het aambeeld en impactor worden eveneens constant gehouden. De enige onbekende parameter in de formule van

$v_{1,0}$ is de coëfficiënt e. De waarde van e hangt af van de materialen die betrokken zijn bij de impact. Deze waarde moet gelegen zijn tussen tussen de volgende twee uiterste waarden:

- $e = 1$ impact tussen twee stijve lichamen, dergelijke impact noemt men voortaan een volkomen harde impact.
- $e = 0$ impact tussen een stijf en een volkomen plastisch vervormbaar lichaam, dergelijke impact noemt men voortaan een volkomen zachte impact.

In deze methode wordt voor het ontwerp van het crash platform gewerkt met een waarde e die gelijk is aan 0,5. Deze e-waarde is verschillend van nul hetgeen wil zeggen dat de impactor terugkaatst wordt na impact op het aambeeld. De gesimuleerde impact is noch volkomen hard, noch volkomen zacht.

Methode van behoud van impuls

Deze methode houdt rekening met demping. Er wordt gebruik gemaakt van de wet van behoud van impuls om de responsie van het systeem op de impact te bepalen. Bovendien wordt verondersteld dat de impactor na impact op het aambeeld blijft liggen en bijgevolg niet teruggekaatst wordt. De bewegingsvergelijkingen worden opgesteld voor een systeem in vrije trilling (F(t)=0), rekening houdend met het feit dat de impactor en aambeeld samen trillen. Uiteraard moeten er beginvoorwaarden aan het aambeeld toegekend worden. Enerzijds is er een statische indrukking $z_{1,0}$ ten gevolge van het gewicht van de impactor, anderzijds heeft het aambeeld een beginsnelheid ten gevolge van de impact van de impactor. Deze beginsnelheid wordt gegeven door

$$v_{1,0} = \frac{m_i}{m_i + m_1} \cdot v_{i,0} \tag{2.45}$$

en kan omgevormd worden tot

$$v_{1,0} = \frac{1+0}{1+\frac{m_1}{m_i}} \cdot v_{i,0} \tag{2.46}$$

Deze vorm zorgt ervoor dat $v_{1,0}$ opnieuw geschreven wordt in functie van $v_{i,0}$ en de coëfficiënt e, die weliswaar nul is. Dit wijst erop dat de impactor niet teruggekaatst wordt na de impact, zodanig dat men kan spreken van een volkomen zachte impact.

Methode impactbelasting

In de vorige twee methodes wordt de responsie van het systeem bepaald door de impactbelasting F(t) gelijk aan nul te stellen en aan het aambeeld een beginsnelheid te geven. De bewegingsvergelijkingen worden dan opgelost voor een systeem in vrije trilling mits de juiste beginvoorwaarden worden gehanteerd. De *methode voor impact machines* en de *methode van behoud van impuls* geven de responsie van het systeem net na de impact. De eigenlijke impact wordt buiten beschouwing gelaten.

In de *methode impactbelasting* wordt zowel de impact als reactie van het crash platform op de impactbelasting onderzocht. Opnieuw wordt er gewerkt met de bewegingsvergelijkingen, maar nu wordt ook de beweging van de impactor in rekening gebracht. De bewegingsvergelijkingen worden opgelost door te integreren over zeer kleine tijdsstappen en hiervoor werd een programma in MATLAB geschreven. Er worden twee fases beschouwd, namelijk wanneer de impactor in contact is met het aambeeld en wanneer de impactor loskomt van het aambeeld. In de eerste fase wordt rekening gehouden met een plastische indrukking via de formule van Hertz en bepaalt men het verloop van de impactbelasting in functie van de tijd. De relatieve eigenschappen van de lichamen komen tot uiting in de formule van Hertz. In deze formule zit een equivalente elasticiteitsmodulus E die functie is van E_1 en E_2. Deze laatste zijn de twee elasticiteismoduli van de materialen betrokken bij de impact. In de tweede fase schiet de impactor terug omhoog en bepaalt men de responsie van het crash platform in vrije trilling. De beginsnelheid van het aambeeld in een bepaalde tijdstap is telkens gelijk aan de snelheid van het aambeeld in de vorige tijdstap. Ook in deze methode wordt rekening gehouden met demping. Er worden twee simulaties uitgevoerd, de eerste kan men een harde impact noemen want $E_1/E_2 = 1$, de tweede noemt men een zachte impact met een verhouding van de elasticiteitsmoduli $E_1/E_2 = 1.000$.

2.7.2 Vergelijking van de verschillende methodes

De verschillende methodes worden met elkaar vergeleken aan de hand van het algemene voorbeeld dat gedurende dit hoofdstuk werd behandeld. De besluiten kunnen doorgetrokken worden voor de andere combinaties. Samengevat heeft men de volgende parameters voor het algemene voorbeeld: een valhoogte h van 25 m, een massa van de impactor m_i van 500 kg, een massa van het aambeeld m_1 van 10.000 kg, een massa van het funderingsblok m_2 van 30.000 kg, equivalente veerconstanten voor de elastische lagen onder het aambeeld en funderingsblok k_1 en k_2 van 50.000.000 N/m en dempingsconstanten c_1 en c_2 van 250.000 N.s/m. De belangrijkste grootheden voor het vergelijken van de verscheidene methodes zijn de maximale verplaatsingen van het aambeeld $z_{1,max}$ en funderingsblok $z_{2,max}$ evenals de beginverplaatsing en -snelheid van het aambeeld $z_{1,0}$ en $v_{1,0}$. Ze worden weergegeven in Tabel 2.5.

Vergelijking van de analytische berekeningsmethoden						
Methode	$z_{1,max}$ [mm]	$z_{2,max}$ [mm]	$z_{1,0}$ [mm]	$v_{1,0}$ [m/s]	e (theoretisch)	e (berekend)
Impact machines	16,8	12,9	0	1,582	0,5	nvt
Behoud van impuls	12,9	9,0	0,1	1,054	0	nvt
Impactbelasting						
Harde impact	24,7	17,2	1,0	2,080	1	0,972
Zachte impact	24,6	16,9	11,0	1,678	onbekend	0,591
Behoud van impuls met e	24,98	17,21	0,1	2,109	1	nvt
	18,74	12,90	0,1	1,582	0,5	nvt
	19,87	13,69	0,1	1,678	0,591	nvt

Tabel 2.5: Vergelijking resultaten algemeen voorbeeld

Op het eerste zicht bestaat er geen enkele overeenkomst tussen de resultaten van de verschillende methoden. Maar zoals reeds aangehaald moet de oorzaak hiervan gezocht worden bij de dimensieloze parameter e, want bij de vier verschillende methoden behoort telkens een andere e, namelijk:

- Bij de *methode impact machines* wordt $e = 0,5$ gekozen, dit betekent concreet dat de impact noch volkomen hard noch volkomen zacht is, maar tussen de twee.
- Bij *de methode behoud van impuls* hoort een theoretische $e = 0$. Bij $e = 0$ wordt in feite een volkomen zachte impact gesimuleerd.
- Bij de harde impact ($E_1/E_2 = 1$) van de *methode impactbelasting* hoort een theoretische $e = 1$. Dit kan gecontroleerd worden met vgl.(2.44). Met deze vergelijking kan e berekend worden die hoort bij de gevonden beginsnelheid van het aambeeld, namelijk $v_{1,0} = 2,080\,\text{m/s}$. Uit deze berekening volgt $e = 0,972$, zoals men kan zien, ligt deze waarde zeer dicht bij 1.
- Bij de zachte impact ($E_1/E_2 = 1.000$) van de *methode impactbelasting* is het niet vanzelfsprekend om een waarde aan e toe te kennen, het is echter wel zo dat de beginsnelheid van het aambeeld in de buurt ligt van de beginsnelheid van het aambeeld bij de methode

impact machines. Vandaar dat men kan voorspellen dat e in de buurt van 0,5 zal liggen, maar iets groter zal zijn. Als e opnieuw berekend wordt met vgl.(2.44) dan vindt men $e = 0,591$. De voorspelling was bijgevolg correct.

Zoals men merkt, hoort bij ieder methode een andere e. Of met andere woorden wordt er bij iedere methode een andere impact gesimuleerd, het is dan ook logisch dat er geen overeenkomsten bestaan tussen de resultaten van de verschillende methoden.

Om de verschillende methodes toch te kunnen vergelijken wordt een nieuwe methode ontwikkeld die een combinatie is van de *methode impact machines* en de *methode behoud van impuls*, deze nieuwe methode wordt de *methode behoud van impuls met e* genoemd. Deze nieuwe methode is volledig gelijklopend met de *methode behoud van impuls*, maar nu wordt de beginsnelheid van het aambeeld berekend met vgl.(2.44). Het programma van deze nieuwe methode is te vinden in Bijlage A.

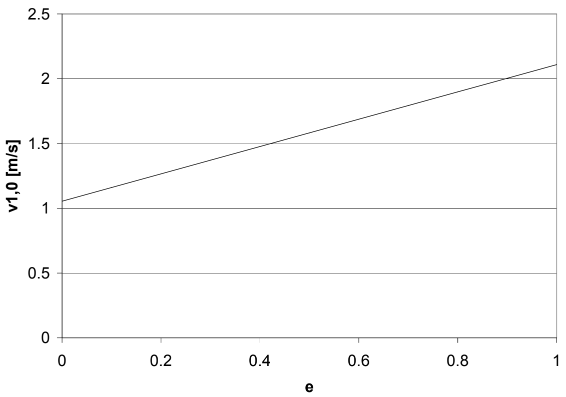
Met de nieuwe methode worden simulaties uitgevoerd met $e = 1$, $e = 0,5$ en met $e = 0,591$. De resultaten van deze simulaties vindt men terug in Tabel 2.5. Pas nu kunnen de verschillende methoden met elkaar vergeleken worden. Men kan het volgende vaststellen:

- Wanneer de resultaten van de *methode impactbelasting*, harde impact vergeleken worden met de resultaten van de *methode behoud van impuls* met e=1 dan kan men zien dat zowel de beginsnelheid als de maximale verplaatsingen zeer dicht bij elkaar aanleunen. Op basis van deze resultaten zou men kunnen besluiten dat beide methoden dezelfde resultaten geven.

- Wanneer de resultaten van de *methode impact machines* vergeleken worden met de resultaten van de *methode behoud van impuls* met e=0,5 dan ziet men dat de beginsnelheden uiteraard dezelfde zijn, want ze worden met dezelfde formule berekend. De maximale verplaatsingen daarentegen zijn niet gelijk, hoewel ze niet veel van elkaar verschillen. Dit verschil ontstaat doordat bij de *methode impact machines* de hogere orde termen verwaarloosd worden, bij de nieuwe methode gebeurt dit niet. Men mag dus besluiten dat de resultaten van de nieuwe methode correcter zullen zijn.

- Als men tenslotte de resultaten van de *methode impactbelasting*, zachte impact vergelijkt met de *methode behoud van impuls* met e=0,591 dan is uiteraard de beginsnelheid opnieuw hetzelfde, maar nu verschillen de maximale verplaatsingen veel van elkaar. Als men kijkt naar de beginverplaatsingen van het aambeeld $z_{1,0}$ dan valt eveneens een groot verschil op tussen beide methoden. Bij de nieuwe methode wordt de beginverplaatsing berekend als de statische indrukking ten gevolge van het gewicht van de impactor, deze is uiteraard zeer klein. Bij de *methode impactbelasting* volgt de beginverplaatsing uit de simulatie zelf en doordat de impactbelasting bij een zachte impact 10 maal langer duurt dan bij een harde impact is de beginverplaatsing veel groter. De combinatie van deze grote beginverplaatsing met de beginsnelheid zorgt voor het grote verschil van de maximale verplaatsingen tussen beide methoden. Men kan besluiten dat de *methode behoud van impuls met e* de zachte impact onderschat.

Uit bovenstaande beschouwingen volgt duidelijk het belang van de relatieve eigenschappen van de materialen die betrokken zijn bij de impact. Deze eigenschappen hebben een rechtstreekse invloed op de beginsnelheid van het aambeeld in vrije trilling na de impact. De relatieve eigenschappen van de materialen worden uitgedrukt in de dimensieloze parameter e. Figuur 2.42 toont het verband tussen de beginsnelheid $v_{1,0}$ en de parameter e bij m_i=500 kg en m_1=10.000 kg.



Figuur 2.42: Verband $v_{1,0}$ t.o.v e

Echter in de vgl.(2.44) is $v_{1,0}$ niet enkel afhankelijk van e maar ook van de relatieve verhouding tussen de massa van het aambeeld en de massa van de impactor, namelijk m_1/m_i. Om dit verband duidelijk te maken, wordt telkens de parameter e berekend die hoort bij de beginsnelheden uit Tabel 2.3, deze berekeningen worden samengevat in Tabel 2.6.

Zoals verwacht heeft de massa van de impactor een duidelijke invloed op de parameter e. Tabel 2.7 kan een hulpmiddel zijn bij het bepalen van de beginsnelheid van het aambeeld na de impact. De tabel geeft de relatieve verhouding tussen de snelheid van de impactor net voor de impact $v_{i,0}$ en de beginsnelheid van het aambeeld net na de impact $v_{1,0}$ weer in functie van e en de relatieve verhouding tussen de massa van de impactor m_i en de massa van het aambeeld m_1.

Invloed m_i op e		
m_i [kg]	$v_{1,0}$ [m/s]	e
5	0,034	0,906
50	0,311	0,777
100	0,590	0,699
200	1,088	0,592
300	1,528	0,513
400	1,920	0,448
500	2,275	0,393

Tabel 2.6: Invloed v/d massa v/d impactor op de parameter e

$v_{1,0}/v_{i,0}$										
	m_i/m_1									
e	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,1
0	0,010	0,020	0,029	0,038	0,048	0,057	0,065	0,074	0,083	0,091
0,1	0,011	0,022	0,032	0,042	0,052	0,062	0,072	0,081	0,091	0,100
0,2	0,012	0,024	0,035	0,046	0,057	0,068	0,079	0,089	0,099	0,109
0,3	0,013	0,025	0,038	0,050	0,062	0,074	0,085	0,096	0,107	0,118
0,4	0,014	0,027	0,041	0,054	0,067	0,079	0,092	0,104	0,116	0,127
0,5	0,015	0,029	0,044	0,058	0,071	0,085	0,098	0,111	0,124	0,136
0,6	0,016	0,031	0,047	0,062	0,076	0,091	0,105	0,119	0,132	0,145
0,7	0,017	0,033	0,050	0,065	0,081	0,096	0,111	0,126	0,140	0,155
0,8	0,018	0,035	0,052	0,069	0,086	0,102	0,118	0,133	0,149	0,164
0,9	0,019	0,037	0,055	0,073	0,090	0,108	0,124	0,141	0,157	0,173
1	0,020	0,039	0,058	0,077	0,095	0,113	0,131	0,148	0,165	0,182

Tabel 2.7: Hulpmiddel bij het bepalen van $v_{1,0}$

2.8 Besluit

De meest correcte methode blijkt de *methode impactbelasting* te zijn. Deze methode bepaald zowel de impactbelasting als de responsie van het crash platform op deze belastingen. Echter met deze methode gaan zeer lange rekentijden gepaard.

Indien men niet geïnteresseerd is in de impactbelasting dan geeft de *methode van behoud van impuls met e* sneller de responsie op de impactbelasting. Echter bij deze methode moet men de factor e schatten, dit vraagt enige ervaring. Bij een harde impact geeft deze methode zeer goede resultaten, maar bij een eerder zachte impact lijkt deze methode de responsie te onderschatten. Dit komt doordat de beginverplaatsing van het aambeeld onderschat wordt, men is dus in feite verplicht om ook de beginverplaatsing van het aambeeld te schatten wil men goede resultaten bekomen bij een zachte impact. Vanwege de twee schattingen die gemaakt moeten worden, leent deze methode zich er eerder toe om een eerste voorontwerp te maken.

Na alle simulaties die in dit hoofdstuk werden besproken wordt nog steeds combinatie 4 als de meest optimale gekozen. Dit omdat met een relatief grote toename van de parameters van combinatie 4 slechts een zeer kleine afname van de responsie gepaard gaat. Ook uit praktische beschouwingen mogen de parameters van combinatie 4 niet meer toenemen, want men mag niet vergeten dat het volledige crash platform in de bestaande toren moet komen. Samengevat zijn de piekwaarden bij de parameters van combinatie 4 en een impactor massa m_i=500 kg:

- Harde impact:
  $z_{1,max}$=30 mm
  $z_{2,max}$=20 mm
- Zachte impact:
  $z_{1,max}$=28,7 mm
  $z_{2,max}$=19,19 mm

Wenst men de maximale verplaatsing van het aambeeld $z_{1,max}$ te beperken tot 15 mm dan moet men de massa van de impactor m_i beperken tot 260 kg.

In het volgend hoofdstuk wordt verder gewerkt met de parameters van combinatie 4.

Hoofdstuk 3

Numerieke berekeningen

3.1 Inleiding

In dit hoofdstuk wordt het crash platform (met de dimensies van combinatie 4 van vorig hoofdstuk) onderworpen aan numerieke berekeningen, daarvoor wordt beroep gedaan op het eindige-elementen pakket ABAQUS. Eerst wordt besproken hoe het crash platform en de impact gemodelleerd worden. Vervolgens wordt uitgelegd hoe deze modellen in ABAQUS worden ingegeven. Daarna worden de resultaten die volgen uit de simulaties uitvoerig geanalyseerd en met elkaar vergeleken. Tenslotte worden in het besluit de meest realistische modellen gekozen.

3.2 Eindige-elementenmethode

De eindige-elementenmethode (e.e.m) [9] is een rekenmethode waarmee b.v. de sterkte-eigenschappen van een ingewikkelde constructie kunnen worden berekend. De methode is ontwikkeld, omdat analytische rekenmethoden onvoldoende mogelijkheden bieden, of te complexe berekeningen vergen. De methode vindt toepassing bij sterkteberekeningen, maar ook bij elektromagnetisme, warmteleer, stromingsleer en nog veel andere disciplines. Het is wiskundig aan te tonen, dat bij het verkleinen van de elementen, de oplossing die met de e.e.m. wordt bereikt, nadert tot de analytisch juiste oplossing. Toch kunnen er bij onjuiste modellering fouten worden gemaakt die ernstige gevolgen kunnen hebben. De eindige-elementenmethode deelt een constructie op in een beperkt (eindig) aantal elementen, en koppelt deze elementen aan elkaar door middel van knooppunten (nodes). Aan deze koppelingen wordt, afhankelijk van het soort element een aantal eisen gesteld. In elk geval moeten de nodes van de elementen tegelijk met elkaar verplaatsen. Het bepalen van de knooppunten en koppelingen komt overeen met het bepalen van een rooster. Door deze methodiek is het mogelijk het gedrag van een complexe constructie te benaderen middels een matrixvergelijking. Het doel is de bepaling van de verplaatsingsvector om daaruit de spanningen en rekken te kunnen bepalen, en daarmee de sterkte van de constructie bij belasting. Om een nauwkeurige berekening te doen, moeten de elementen voldoende klein gekozen worden. Daardoor worden de rekenmodellen over het algemeen wel groot. De elementen die gebruikt worden in deze methoden variëren al naargelang het aantal dimensies (D):

- (1D) Staafelementen
- (2D) Oppervlakte-elementen (driehoekig of met vier hoekpunten)
- (3D) Volume-elementen (tetraëder of kubus)

Elk element krijgt op basis van de getekende geometrie, de (niet getekende) geometrische parameters als plaatdikte, doorsnede e.d., het gebruikte materiaal, de stijfheidseigenschappen toegewezen. Bij het uitvoeren van een dynamische berekening is het nodig om ook gewichtseigenschappen toe te wijzen.

Om de eindige-elementenmethode toe te passen wordt gebruik gemaakt van het programma ABAQUS [10]. Dit eindige-elementenpakket bevat verschillende paketten, namelijk:

- ABAQUS/Standard, dit is een eindige-elementen programma voor algemeen gebruik;
- ABAQUS/Explicit, dit is een eindige-elementen programma speciaal ontwikkeld voor dynamische problemen;
- ABAQUS/CAE, dit is een interactieve omgeving voor het creëren van eindige-elementen modellen, het samenstellen van de soort ABAQUS analyse en het analyseren van de resultaten;
- ABAQUS/Viewer, dit is een onderdeel van ABAQUS/CAE dat alleen gebruikt wordt voor het visualiseren van de resultaten.

Omdat een impact een dynamisch proces is, wordt gebruik gemaakt van ABAQUS/Explicit.

3.3 Modellen

Het modelleren van het crash platform en de impact is de belangrijkste stap in de eindige-elementenmethode. Want een onjuiste modellering leidt tot foute resultaten die ernstige gevolgen kunnen hebben.

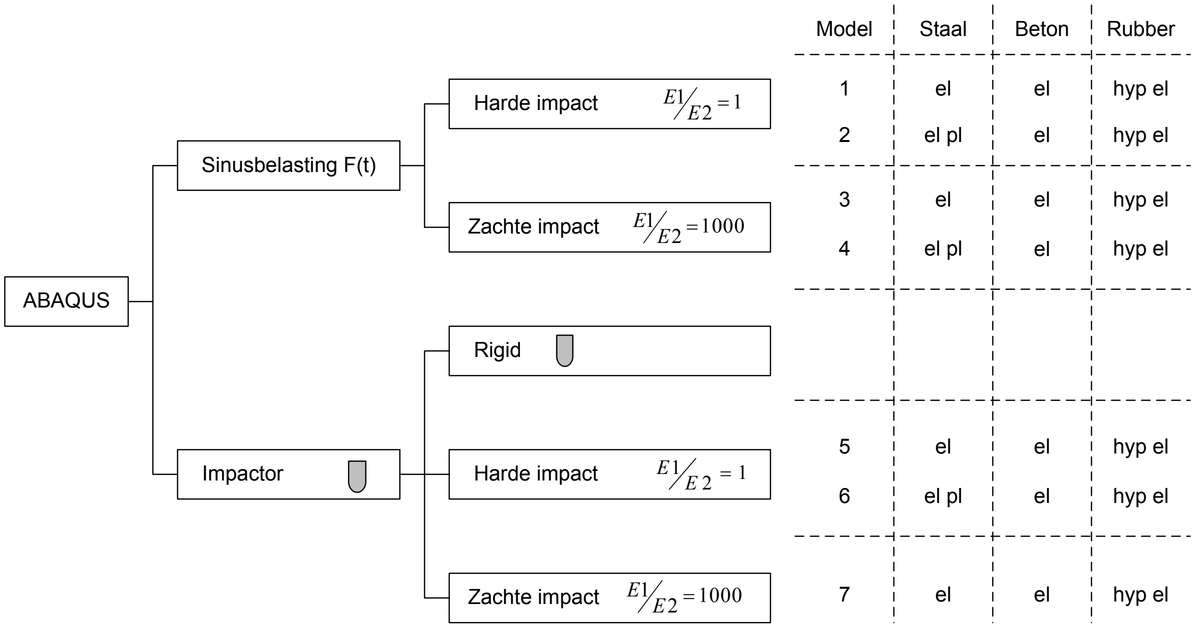
Vanwege het belang van de modellering worden in deze paragraaf de behandelde modellen besproken. Figuur 3.1 geeft een overzicht van de modellen. Er worden in totaal 7 modellen gesimuleerd. Een eerste onderscheid gebeurt op basis van de modellering van de impactbelasting. Een verdere onderverdeling gebeurt in analogie met Hoofdstuk 2 op basis van het soort impact. Ten slotte is er nog een onderverdeling op basis van de modellering van de betrokken materialen, de tabel naast de boomstructuur toont deze onderverdeling. In deze tabel betekenen de afkortingen het volgende:

- el = elastisch materiaalgedrag
- el pl = elastisch plastisch materiaalgedrag
- hyp el = hyperelastisch materiaalgedrag

De kenmerken van de verschillende soorten materiaalgedrag komen aan bod in paragraaf 3.4.2. Het materiaal van het aambeeld is staal en van het funderingsblok is dit beton. In de modellen waar de impactor mee gemodelleerd wordt, moet aan deze ook een materiaal toegekend worden. Voor de harde impact krijgt de impactor dezelfde materiaaleigenschappen als het staal van het aambeeld. Voor de zachte impact zal een fictief materiaal aan de impactor toegekend worden met een elasticiteitsmodulus die 1.000 keer kleiner is dan de E-modulus van staal.

Naast het model *impactor-rigid* wordt geen materiaalgedrag gedefinieerd, dit komt doordat dit model geen goede resultaten genereert, de reden hiervoor komt later aan bod (paragraaf 3.4.7). Wanneer men model 2 laat lopen in ABAQUS, levert dit een *error* op doordat de verhouding tussen de vervormingssnelheid en golfsnelheid de waarde 1 overschrijdt in minstens 1 element. Er worden bijgevolg geen resultaten verkregen uit dit model. Om na te gaan of de gesimuleerde modellen convergeren naar de juiste oplossing, werd een model gemaakt waarbij de *mesh* van de onderdelen verfijnd is. Na vergelijking van dit model met het overeenkomstige model, maar met een grovere *mesh*, blijkt dat de resultaten overeenkomen. Het model met de fijnere *mesh* is niet opgenomen in de modellenboom.

Voor de modellering van het crash platform wordt vertrokken van Figuur 2.4 (Hoofdstuk 2), hierbij wordt de kuip gemodelleerd als zijnde een stijve ondersteuning voor de elastische laag die erop rust. De elastische laag boven de kuip bestaat in feite uit luchtveren. Het modelleren van luchtveren in ABAQUS gebeurt met behulp van *fluid elements*. Dit is echter geen sinecure en zou ons te ver leiden, vandaar dat ervoor gekozen wordt om de luchtveren te vervangen door een rubberlaag.



Figuur 3.1: Behandelde modellen

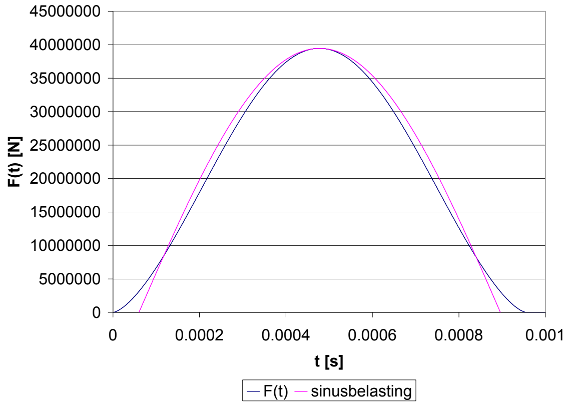
De grootste uitdaging is het ingeven van de impactbelasting. Er worden twee modellen ontwikkeld om deze impactbelasting te simuleren.

3.3.1 Sinusbelasting

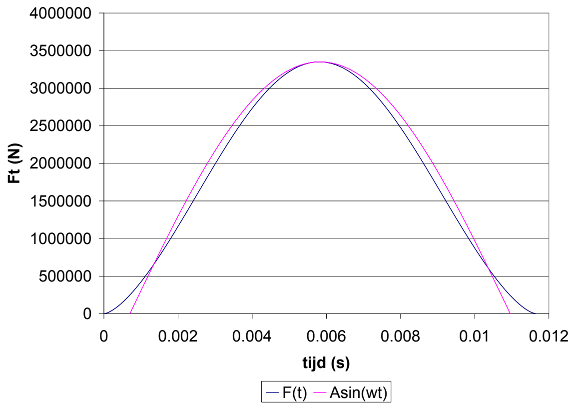
Er is reeds aangehaald dat de vorm van de impactbelasting gevonden met de methode *impactbelasting* in Hoofdstuk 2 paragraaf 2.5.5 sterk lijkt op een sinusfunctie. Vandaar het idee om de impactbelasting te modelleren als een sinusfunctie, deze omgevormde impactbelasting wordt voor de eenvoud een sinusbelasting genoemd. De algemene vorm van de sinusbelasting is:

$$F(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t) \tag{3.1}$$

Figuur 3.2 en Figuur 3.3 toont de bepaling van de sinusbelasting bij respectievelijk een harde en een zachte impact met de parameters van combinatie 4 uit Hoofdstuk 2 paragraaf 2.4. In deze figuren staan eveneens de impactbelastingen $F(t)$, gevonden met de methode *impactbelasting*, afgebeeld.



Figuur 3.2: Sinusbelasting bij een harde impact en de parameters van combinatie 4



Figuur 3.3: Sinusbelasting bij een zachte impact en de parameters van combinatie 4

De sinusbelasting in Figuur 3.2 heeft de volgende karakteristieken:

- Amplitude A=39.455.067 N
- Periode T=0,001672 s
- Frequentie f=598,0861 Hz
- Hoeksnelheid ω=3.757,886 rad/s

De sinusbelasting in Figuur 3.3 heeft de volgende karakteristieken:

- Amplitude A=3.350.174 N
- Periode T=0,02052 s

- Frequentie f=48,73 Hz
- Hoeksnelheid ω=306,19 rad/s

Beide sinusbelastingen worden als een puntbelasting op het midden van het aambeeld aangebracht gedurende een halve periode T. Het onderscheid tussen een harde of een zachte impact wordt nu gemaakt door de keuze van één der sinusbelastingen. Uiteraard is een echte impactbelasting geen puntbelasting, dus dit is een vereenvoudiging. Concreet betekent dit dat in de dichte buurt van de puntlast zeer hoge spanningen zullen voorkomen. Nochtans is deze benadering zeker aanvaardbaar, maar men moet onthouden dat de lokale spanningen ter hoogte van de puntlast buiten beschouwing moeten gelaten worden. Globaal gezien zal deze puntlast een goede benadering van een impactbelasting zijn.

3.3.2 Impactor

Een andere manier om de impactbelasting te modelleren is door de impactor mee te nemen in het model en deze te laten impacteren op het aambeeld. Dit is het beste, maar tegelijkertijd het meest complexe model, waardoor ook de rekentijd drastisch toeneemt. Op het vorige model (sinusbelasting) kan men kritiek uiten op het feit dat de impactbelasting zelf volgt uit een analytische berekening en men daardoor niet zeker is van de juistheid van het model. Door de impactor mee te modelleren moet men de impactbelasting niet meer op voorhand kennen. Uiteraard wordt hier een accidenteel belastingsgeval beschouwd waarbij de impactor rechtstreeks op het aambeeld inslaat, dit belastingsgeval werd voorheen een harde impact genoemd. Om de zachte impact te modelleren wordt, zoals in Hoofdstuk 2, de elasticiteitsmodulus van de impactor 1.000 maal kleiner genomen dan de elasticiteitsmodulus van het aambeeld. In het model *impactor-rigid* (zie Figuur 3.1) wordt de impactor als stijf verondersteld. Dit model geeft echter geen resultaten.

3.4 Modellering in ABAQUS

3.4.1 Geometrie

Er wordt verder gewerkt met de afmetingen van het crash platform uit combinatie 4 bekomen in Hoofdstuk 2 paragraaf 2.4. Dit is nodig om een vergelijking te kunnen maken tussen de analytische berekeningen en de numerieke berekeningen. Het crash platform heeft in bovenaanzicht twee symmetrie assen en de impactbelasting grijpt in het snijpunt van deze twee symmetrie assen aan, meer bepaald in het midden van het aambeeld. In het model waar de impactor mee gemodelleerd wordt, treft de impactor het aambeeld ook in het snijpunt van de symmetrie assen. Om deze reden wordt slechts een vierde van het crash platform en van de impactor gemodelleerd, dit heeft als gevolg dat de rekentijden in belangrijke mate worden gereduceerd. Men mag dit doen want de spanningen die de impactbelasting in het crash platform teweeg brengen zijn symmetrisch ten opzichte van de geometrische symmetrie assen.

Ieder uniek onderdeel van het crash platform wordt in ABAQUS gemodelleerd als een *part*. Hierna wordt van iedere *part* de afmetingen gegeven en enkel de impactor wordt afgebeeld.

Het aambeeld

Het aambeeld wordt ingegeven als een *3D-deformable-solid-extrusion* met als afmetingen:

- Oppervlakte = 1 m × 1 m, men mag niet vergeten dat in werkelijkheid de oppervlakte van het aambeeld vier maal groter is en dit geldt ook voor de andere onderdelen.
- Dikte = 0,20 m

Het funderingsblok

Het funderingsblok wordt ingegeven als een *3D-deformable-solid-extrusion* met als afmetingen:

- Oppervlakte = 1 m × 1 m
- Dikte = 2 m

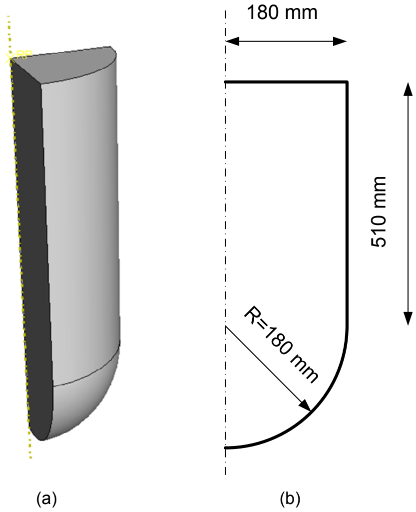
De rubberlagen

De rubberlaag komt tweemaal voor in het crash platform, namelijk tussen het aambeeld en het funderingsblok en onder het funderingsblok. Het rubber wordt ingegeven als een *3D-deformable-solid-extrusion.* In Hoofdstuk 2 paragraaf 2.6 wordt een voorstel gedaan van de dikte voor de elastische lagen op basis van de elasticiteitsmodulus en de veerconstante die toegekend wordt aan de elastische laag. Men komt daar tot een dikte van 0,16 m. In de numerieke berekening wordt deze dikte behouden om een vergelijking te kunnen maken met de analytische berekening.

- Oppervlakte = 1 m × 1 m
- Dikte = 0,16 m

De impactor

De impactor wordt ingegeven als een *3D-deformable-solid-extrusion*, in Figuur 3.4(a) wordt de impactor afgebeeld. De afmetingen worden weergegeven in Figuur 3.4(b). De afmetingen zijn zodanig dat het gewicht van een vierde van de impactor gelijk is aan 125 kg (=500 kg/4).



Figuur 3.4: De impactor

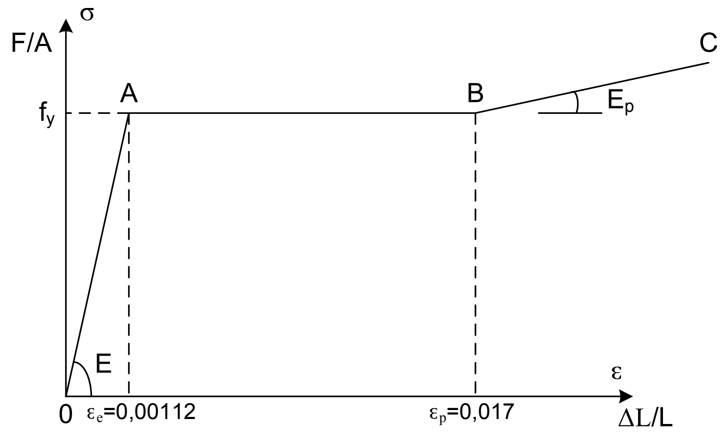
3.4.2 Materialen

De materialen die toegekend worden aan de verschillende onderdelen van het model zullen hier besproken worden. In het model zijn drie materialen opgenomen, zijnde staal, beton en rubber. Het ingeven van de materialen gebeurt in de module *property*.

Staal

Het aambeeld wordt gemodelleerd als een stalen plaat met een dikte van 0,2 m. Vooreerst zal het staal gemodelleerd worden als een elastisch materiaal met een elasticiteitsmodulus E van 210.000 MPa en een coëfficiënt van Poisson van 0,3. Er wordt gewerkt met staalsoort Fe 360, gekarakteriseerd door een vloeigrens f_y van 235 MPa. Het spannings-rekdiagram van dit zacht staal kan verkregen worden uit een trekproef in de longitudinale richting.

Men kan zich uiteraard inbeelden dat het aanslaan van de impactor op het aambeeld aanleiding zal geven tot grote spanningen in de stalen plaat. Het staal zal de elastische zone verlaten en overgaan tot plastische vervormingen. Het lijkt dan aangewezen om het staal te modelleren als een elastisch-plastisch materiaal. Hiervoor wordt het ware spannings-rekdiagram, verkregen uit trekproeven, omgevormd tot een geschematiseerd diagram [11]. Een dergelijk diagram voor staalsoort Fe 360 is weergegeven in Figuur 3.5



Figuur 3.5: Geschematiseerd σ-ϵ diagram staal Fe 360

Het staal is volmaakt elastisch tot in A en kan dan plastisch worden gerekt bij een constante spanning gelijk aan de vloeispanning f_y tot in B. Wanneer het punt B bereikt is, moet men de spanning verhogen om het metaal verder uit te rekken. De richtingscoëfficiënt E_p van het deel BC ligt tussen 3.000 MPa en 6.000 MPa. De tak BC stelt de versteviging van het staal voor. Die tak is zeer lang, want de proefstaaf breekt slechts bij een breukrek die 0,16 à 0,20 bedraagt. Wanneer het staal gemodelleerd wordt als een elastisch materiaal dan bedoelt men hiermee de tak OA. Om het staal elastisch-plastisch te modelleren, wordt de tak OA en de tak AB ingegeven. Er wordt geen rekening gehouden met de versteviging en de plastische rek wordt beperkt tot 0,017.

Wanneer de impactor eveneens gemodelleerd wordt, zal ook hieraan een materiaal moeten toegekend worden. In het geval van harde impact krijgt de impactor eerst staal als lineair elastisch materiaal toegewezen. Maar net zoals het aambeeld, zal de impactor aan grote spanningen blootgesteld worden. Om de plastische vervormingen die met deze spanningen gepaard gaan te kennen, wordt aan de impactor het materiaal staal als elastisch-plastisch toegekend. In het model met de impactor en zachte impact is het minder eenduidig welk materiaalmodel moet worden gegeven aan de impactor. Men wil hier namelijk een simulatie uitvoeren van een impact tussen twee materialen waarvan de elasticiteitsmoduli een factor 1.000 van elkaar verschillen. Om dit te verkrijgen, modelleert men het aambeeld als staal lineair elastisch met een elasticiteitsmodulus E van 210.000 MPa en coëfficiënt van Poisson van 0,3. De impactor wordt gemodelleerd als een materiaal met een elasticiteitsmodulus E van 210 MPa en coëfficiënt van Poisson van 0,3. Dit is echter een fictief materiaal maar biedt toch de mogelijkheid om de zachte impact te simuleren. De dichtheid van het staal bedraagt 7.850 kg/m^3.

Beton

Het funderingsblok is een blok beton, dit beton wordt gemodelleerd als een elastisch materiaal met een elasticiteitsmodulus E van 30.000 MPa [12]. De coëfficiënt van Poisson mag voor elastische rek ($\sigma_c \leq 0,4f_c$, met σ_c de drukspanning in het beton en f_c de druksterkte van het beton) gelijkgesteld worden aan 0,2 [14]. De dichtheid van gewapend beton bedraagt 2.500 kg/m^3.

Rubber

De elastische lagen onder het aambeeld en funderingsblok zullen, zoals reeds vermeld in paragraaf 3.3, gemodelleerd worden als rubber. In het vorige hoofdstuk wordt aan de elastische lagen een veerconstante k en een dempingsconstante c gegeven. De waarden hiervan worden zodanig gekozen dat men tot aanvaardbare verplaatsingen van het aambeeld en funderingsblok komt. De veerconstante k heeft dan een waarde van 50.000.000 N/m en de dempingsconstante c een waarde van 250.000 N.s/m. Het ingeven van rubber in ABAQUS gebeurt echter niet op deze manier. In ABAQUS worden elastomeren (rubber) gemodelleerd als hyperelastische materialen [15] en [16]. Dit verschil in modelleren van de elastische lagen zal een belangrijke rol spelen in het vergelijken van de analytische methodes met de numerieke benadering, zijnde het eindige-elementenpakket ABAQUS, maar hierover later meer.

De meeste elastomeren hebben een zeer kleine samendrukbaarheid in vergelijking met hun afschuifcapaciteit. De relatieve samendrukbaarheid van een materiaal wordt uitgedrukt als de verhouding van de initiële compressiemodulus K_0 tot de initiële glijdingsmodulus μ_0. Deze verhouding kan ook uitgedrukt worden in termen van de coëfficiënt van Poisson ν volgens

$$\nu = \frac{3K_0/\mu_0 - 2}{6K_0/\mu_0 + 2} \tag{3.2}$$

Wanneer verondersteld wordt dat het rubber onsamendrukbaar is, dan is de compressiemodulus oneindig, dit stemt overeen met een ν van 0,5 en dus een constant volume [13] want

$$\triangle V = V \cdot (1 - 2\nu) \cdot \epsilon \tag{3.3}$$

Hierin is $\triangle V$ het verschil in volume, V het oorspronkelijk volume, ε de rek ($=\triangle l/l$) en ν de Poisson coëfficiënt. Een constant volume wil zeggen dat de kracht nodig om het volume te veranderen oneindig is en bijgevolg $K_0 = \infty$.

Hyperelastische materialen worden beschreven in termen van een rek-energie potentiaal, $U(\varepsilon)$, deze potentiaal bepaalt de rek-energie die opgeslagen wordt in het materiaal per eenheid van een referentievolume (dit is het volume in de oorspronkelijke configuratie) als een functie van de rek op dat moment in het materiaal. Er zijn verschillende vormen van de rek-energie potentiaal beschikbaar in ABAQUS om onsamendrukbare elastomeren te modelleren. Voor het modelleren van het rubber van het crash platform wordt gewerkt met de Arruda-Boyce vorm [15]. Voor meer informatie hieromtrent wordt verwezen naar Bijlage D. In de Arruda-Boyce vorm wordt het afschuifgedrag beschreven door de materiaalconstanten μ en λ_m, terwijl D de samendrukbaarheid beschrijft. De initiële glijdingsmodulus en compressiemodulus worden dan gegeven door

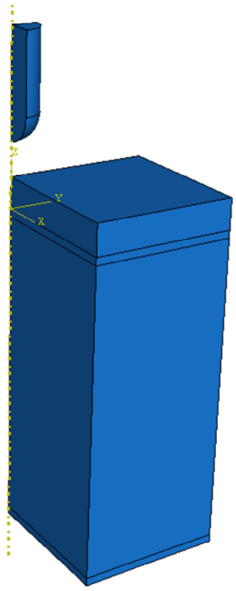
$$\mu_0 = \mu\left(1 + \frac{3}{5\lambda_m^2} + \frac{99}{175\lambda_m^4} + \frac{513}{875\lambda_m^6} + \frac{42039}{67375\lambda_m^8}\right) \quad en \quad K_0 = \frac{2}{D} \tag{3.4}$$

Het rubber dat gebruikt wordt voor de elastisch laag, is een 8% sulfur rubber [16] dat een hoog omkeerbaar gedrag vertoont. Informatie hieromtrent kan gevonden worden in Bijlage D. De materiaalconstanten die gebruikt worden in het Arruda-Boyce model zijn μ=0,321 MPa, λ_m=5,24 en D=0. Dit geeft een initiële glijdingsmodulus μ_0 van 0,328 MPa en een initiële compressiemodulus $K_0 = \infty$ (onsamendrukbaar).

Er wordt nog vermeld dat voor de dichtheid van het rubber 1.522 kg/m^3 [18] genomen wordt.

3.4.3 Assemblage

In deze module worden alle onderdelen van het crash platform samengevoegd. Bij de modellen waar de impactor mee gemodelleerd wordt, wordt de afstand tussen de bovenkant van de impactor en het aambeeld op 0,9072 m gezet. Dit heeft te maken met de module stappen, die besproken worden in paragraaf 3.4.4. In Figuur 3.6 wordt de assemblage van het model met de impactor weergegeven.



Figuur 3.6: Assemblage model met impactor

3.4.4 Stappen

De module *step* zorgt ervoor dat men bij het opbouwen van een model kan bepalen wanneer de randvoorwaarden en krachten aangebracht worden. Voor het beschrijven van de stappen in de modellering wordt een onderscheid gemaakt tussen het model met de sinusbelasting en het model met de impactor. Voor beide modellen echter bestaat er een *step initial* waarin de randvoorwaarden aangebracht worden. Deze randvoorwaarden worden behandeld in paragraaf 3.4.6.

Sinusbelasting

De impactbelasting die ontstaat door het aanslaan van de impactor op het aambeeld heeft een vorm die kan benaderd worden als een sinus met een zekere amplitude en periode en dit zowel voor de harde impact als de zachte impact (Figuur 3.2 en 3.3). Wanneer de duur van de impactbelasting voorbij is, zal het systeem in vrije trilling zijn. Er worden twee stappen ingevoerd:

- *Step Impact*: aanbrengen van de impactbelasting als een sinus.
- *Step Free Vibration*: vrije trilling van het systeem.

De duur van de twee stappen moet nog bepaald worden. Voor de *Step Impact* is dit duur van de impactbelasting. Aangezien deze benaderd wordt als een sinus neemt men hiervoor de halve periode T. Bij een harde impact is de periode 0,001672 s, voor de zachte impact 0,02052 s. Dit geeft een duur van de *Step Impact* van respectievelijk 0,000836 s voor harde impact en 0,01026 s voor zachte impact. De duur van de *Step Free Vibration* kan eigenlijk vrij gekozen worden. Men kan het systeem zolang laten natrillen als men zelf verkiest. Om de rekentijd echter te beperken wordt de duur van deze stap op 0,5 s gezet. Deze duur is voldoende om een beeld te vormen over de responsie van het systeem na de impact.

Impactor

In dit model wordt de impactor mee gemodelleerd. Er moet vooreerst uitgedrukt worden dat de impactor zich in vrije val bevindt. De vrije val eindigt door contact tussen de impactor en het aambeeld: de impact. Vervolgens kaatst de impactor terug en is het crash platform in vrije trilling. Dit alles wordt uitgedrukt in de volgende twee stappen:

- *Step Shoot*: de impactor is in vrije val en beweegt met een snelheid van 22,15 m/s ($=\sqrt{2gh}$). Deze stap duurt tot er contact is tussen de impactor en het aambeeld.
- *Step Impact*: de impactor impacteert op het aambeeld en dit vormt de impact. Daarna kaatst de impactor terug en is het systeem in vrije trilling.

De duur van de *Step Shoot* is van weinig belang, men zou deze zeer kort kunnen nemen want deze stap dient er enkel voor om de impactor in beweging te brengen. Maar om het model duidelijk te houden, laat men deze stap duren tot wanneer er contact is met het aambeeld. In de assemblage wordt de impactor op een afstand van 0,9072 m van het aambeeld geplaatst. Men weet dat de impactor een hoogte heeft van 0,6857 m en dat deze beweegt met een snelheid van 22,15 m/s. Wanneer men de *Step Shoot* nu 0,01 s laat duren, dan zal er op het einde van deze stap juist contact zijn tussen impactor en aambeeld. Inderdaad $0{,}6857\,\mathrm{m} + 0{,}01\,\mathrm{s} \cdot 22{,}15\,\mathrm{m/s} = 0{,}9072\,\mathrm{m}$. De duur van de *Step Impact* wordt net als bij de sinusbelasting op 0,5 s gezet.

3.4.5 Interactie

In de module *assembly* worden de verschillende onderdelen geschikt in de juiste positie. Maar dit zorgt er nog niet voor dat deze delen aan elkaar gekoppeld zijn. Dit gebeurt in de module *interaction*. In deze module wordt er gezorgd worden dat de onderdelen niet van elkaar loskomen en als het ware verbonden zijn met elkaar. Deze beperking kan opgelegd worden met een *tie constraint*, die ervoor zorgt dat twee gescheiden oppervlakken met elkaar verbonden worden zodat er geen relatieve verplaatsing tussen beide optreedt. In het model van het crash platform moet er een *tie constraint* aangebracht worden tussen het aambeeld en de eerste rubberlaag, tussen de eerst rubberlaag en het funderingblok en tussen het funderingsblok en de tweede rubberlaag.

3.4.6 Belasting en randvoorwaarden

Het ingeven van de belasting en de randvoorwaarden gebeurt in de module *load*.

Belasting

Het aanbrengen van een belasting gebeurt enkel in het model dat werkt met de sinusbelasting. In het model met de impactor wordt deze mee gemodelleerd en moet er bijgevolg geen belasting ingevoerd worden.

De impactbelasting $F(t)$ wordt benaderd door een sinus. Het ingeven van een dergelijke periodieke kracht gebeurt in ABAQUS met een *amplitude curve* [19]. Het is vooreerst een geconcentreerde kracht waarvan het verloop in functie van de tijd een sinus is, in ABAQUS wordt deze kracht geschreven als een Fourier reeks:

$$a = A_0 + \sum_{n=1}^{N} [A_n \cos n\omega(t - t_0) + B_n \sin n\omega(t - t_0)] \tag{3.5}$$

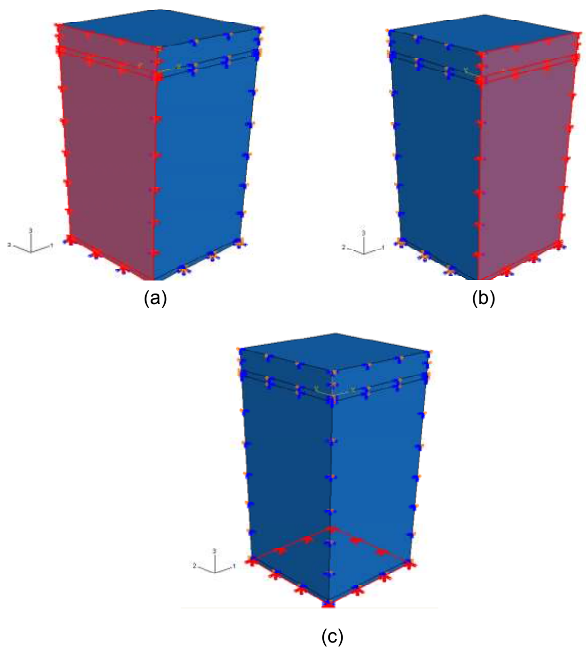
Voor zowel de impactbelasting bij harde impact als bij zachte impact volstaat één sinus als benadering van de impactbelasting. Dit zorgt ervoor dat in vgl.(3.5) A_n=0 en N=1. Bij de start zijn de amplitude en de tijd gelijk aan 0 en dit geeft dat A_0=t_0=0. Er moet nu nog een waarde toegewezen worden aan B_1 en ω. De waarden zijn reeds bepaald in paragraaf 3.3.1. Er moet slechts een vierde van de amplitude genomen worden aangezien er slechts een vierde van het crash platform gemodelleerd wordt. Voor de harde impact geeft dit een amplitude B_1 van 9,86 MN en een pulsatie ω van 3.757,886 rad/s, voor de zachte impact is B_1 gelijk aan 0,8375 MN en ω gelijk aan 306,1981 rad/s.

Randvoorwaarden

Er wordt een vierde van het crash platform gemodelleerd en daarom zullen de juiste randvoorwaarden moeten ingegeven worden. Eerst worden de randvoorwaarden besproken die gelijk zijn in beide modellen (sinusbelasting en impactor). Elk onderdeel (aambeeld, funderingsblok en rubberlagen) van het crash platform heeft vier randen. Twee ervan zijn vrij en moeten niet van randvoorwaarden voorzien worden. De andere twee randen moeten randvoorwaarden toegewezen krijgen die ervoor zorgen dat er beperkingen opgelegd worden welke veroorzaakt worden door het overige drie vierde van het crash platform. In ABAQUS gebeurt dit door aan de ene rand X-symmetrie en aan de andere rand Y-symmetrie als randvoorwaarde te geven. Bovendien moet het crash platform onderaan ingeklemd zijn, dit komt erop neer dat alle verplaatsingen en hoekrotaties op nul gezet worden. Deze drie randvoorwaarden worden als volgt uitgedrukt en zijn afgebeeld in Figuur 3.7, de letter U staat voor een verplaatsing en de letters UR voor een hoekrotatie:

- X-symmetrie: U1=UR2=UR3=0
- Y-symmetrie: U2=UR1=UR3=0
- Inklemming: U1=U2=U3=UR1=UR2=UR3=0

Elk van deze randvoowaarden wordt aangehouden in de verschillende stappen van de modellen, zowel voor het model met sinusbelasting als het model met de impactor.

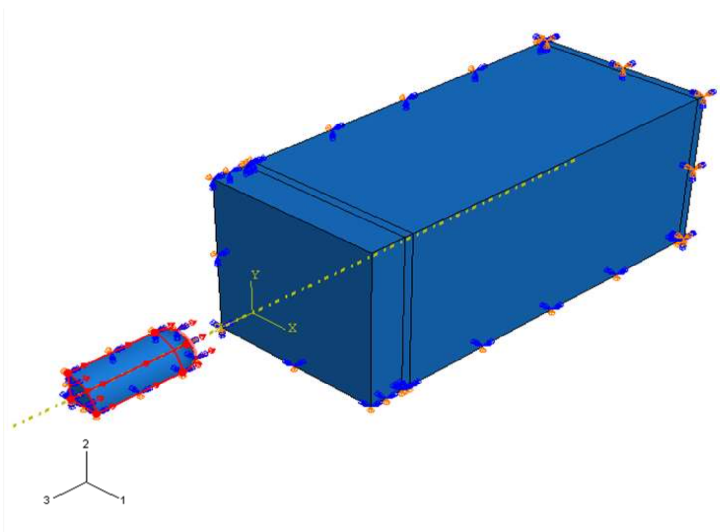


Figuur 3.7: Randvoorwaarden: (a) X-symmetrie (b) Y-symmetrie (c) Inklemming

In het model met de impactor moet er echter nog een extra randvoorwaarde ingegeven worden, welke zal veranderen gedurende de verschillende stappen. Deze randvoorwaarde krijgt de benaming *stampvelocity* en beschrijft de beweging van de impactor. Ze wordt als volgt ingegeven in de verschillende stappen, de letter V staat voor snelheid en de letters VR voor een hoeksnelheid:

- *Step Initial*: de impactor wordt vastgehouden, V1=V2=V3=VR1=VR2=VR3=0
- *Step Shoot*: de impactor krijgt de snelheid 22,15 m/s, dit wordt uitgedrukt door V3= -22,15 m/s
- *Step Impact*: de impactor wordt afgeremd door contact met het aambeeld en wordt dan teruggekaatst, dit doet men door de randvoorwaarde op inactief te zetten tijdens de *Step Impact*. Het contact tussen de impactor en het aambeeld wordt gemodelleerd als een *hard contact* in ABAQUS. Dit zorgt ervoor dat de impactor niet door het crash platform heen gaat maar teruggekaatst wordt.

. De randvoorwaarde *stampvelocity* tijdens de *Step Shoot* is te zien in Figuur 3.8



Figuur 3.8: Randvoorwaarde impactor tijdens de *Step Shoot*

3.4.7 Mesh

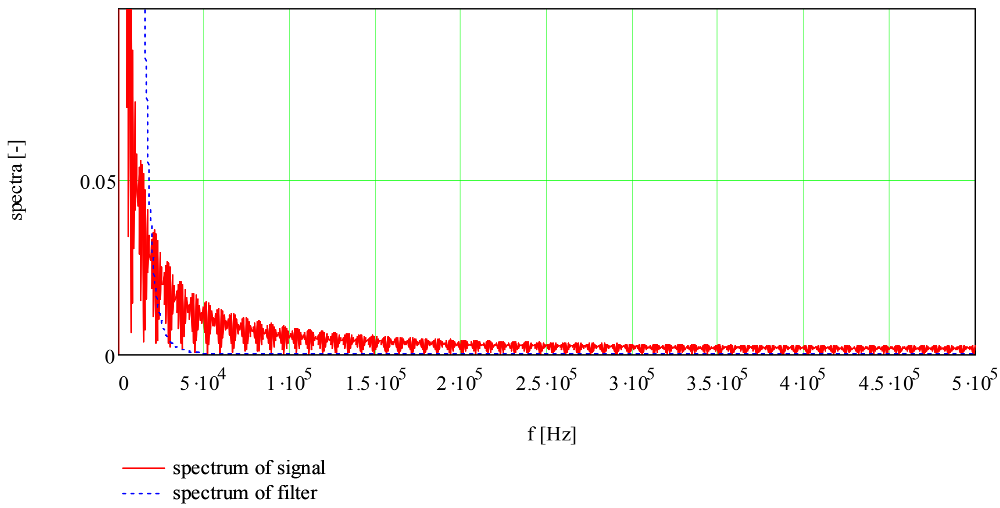
In de module *mesh* worden de onderdelen in elementen opgesplitst, ze krijgen namelijk een mesh toegewezen. Er zal besproken worden waarom het model met de impactor als *rigid* niet kan gebruikt worden. Vervolgens wordt de grootte van de elementen bepaald door het signaal van de impactbelasting te analyseren. Tenslotte worden de elementen van de verschillende onderdelen gegeven.

Model met impactor rigid

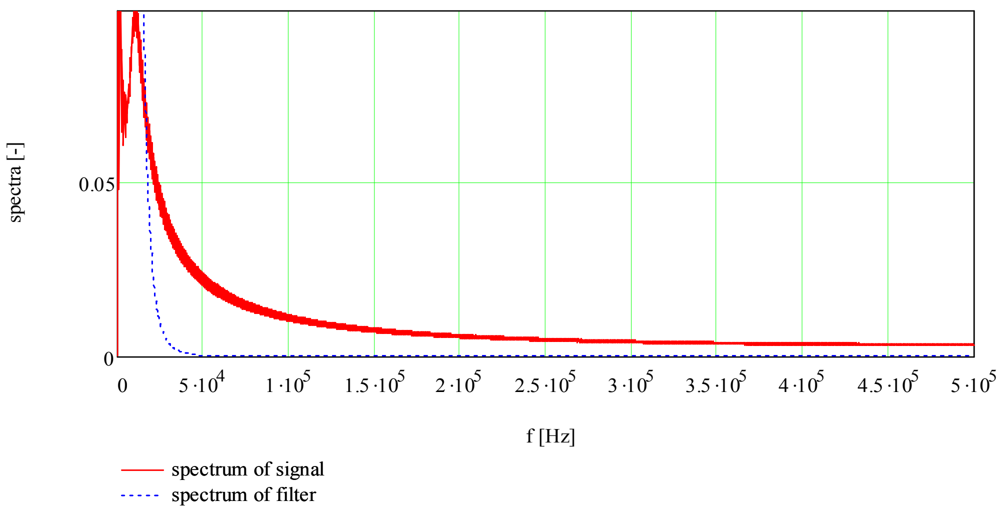
Wanneer in ABAQUS een model opgesteld wordt waarbij de impactor als een *rigid part* inslaat op het aambeeld, geeft dit geen stabiele resultaten. De reden hiervoor ligt bij het feit dat de impactor oneindig stijf is (*rigid*) en bijgevolg geen vervormingen kan ondergaan. De impactbelasting van een dergelijke impact zou het volgende verloop hebben in functie van de tijd: een zeer korte stijgtijd, een piek en een zeer korte daaltijd. Wanneer een dergelijke belasting aan een Fouriertransformatie zou onderworpen worden, worden er zeer grote frequenties bekomen die nog steeds van groot belang zijn voor het gedrag van het crash platform. Deze hoge frequenties bepalen de grootte van de elementen in ABAQUS, dit wordt later besproken in deze paragraaf. De elementen zouden veel te klein moeten zijn om de spanningsgolf te kunnen volgen. Bovendien heeft dit ook een invloed op de rekentijd, die veel te groot wordt. Dergelijke impact is ook niet realistisch want zowel de impactor als het aambeeld zullen vervormingen ondergaan en dit is niet mogelijk wanneer de impactor als *rigid* gemodelleerd wordt.

Bepalen grootte van de elementen

De impactbelasting $F(t)$ zowel van de harde impact als van de zacht impact wordt onderworpen aan een Fouriertransformatie. Hierbij wordt de geanalyseerde functie uitgedrukt als een superpositie van cosinussen. Elke cosinus term is voorzien van een amplitude en een frequentie. Wanneer men nu een grafiek uitzet met in verticale as de amplitude tegenover de frequentie op de horizontale as dan bekomt men een spectrum van het signaal. De impactbelasting kan reeds goed benaderd worden door één cosinus (of sinus), stelt men de amplitude die hierbij hoort gelijk aan A_1 en beperkt men in het spectrum de amplitude tot $0{,}01 \cdot A_1$ dan bekomt men een grafiek als in Figuur 3.9 voor harde impact en als in Figuur 3.10 voor zachte impact. Het uitvoeren van een Fouriertransformatie gebeurt met het programma MATCAD.

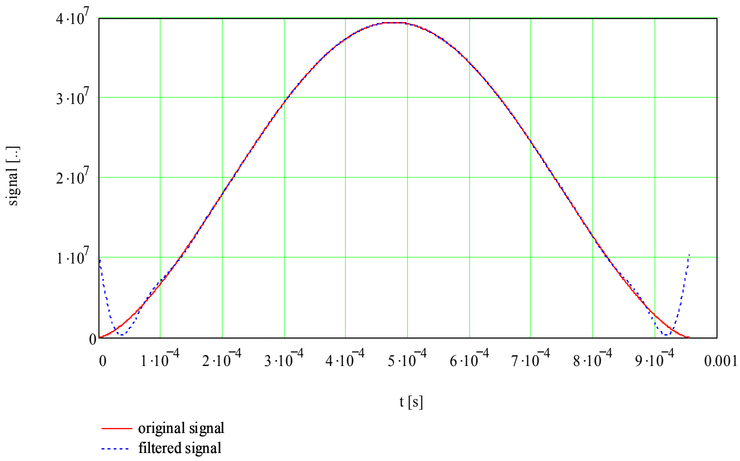


Figuur 3.9: Spectrum harde impact

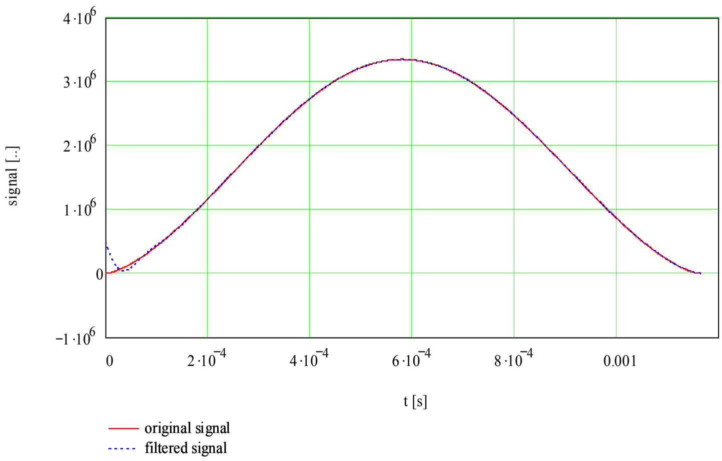


Figuur 3.10: Spectrum zachte impact

De kleinste frequentie waar de amplitude van de bijhorende cosinus-term op 10% van A_1 is teruggevallen, blijkt voor beide signalen onder de 10.000 Hz te liggen. Er wordt een filter toegepast op de impactbelastingen. Deze filter werkt met een *cut-off* frequentie van 10.000 Hz, wat wil zeggen dat alle frequenties hoger dan 10.000 Hz verwaarloosd worden. Aan de hand van deze filter kan de impactbelasting opnieuw opgesteld worden. In Figuur 3.11 en 3.12 kan men zien dat de het origineel signaal en het gefilterd signaal volledig samenvallen.



Figuur 3.11: Harde impact: origineel en gefilterd signaal met *cut-off* limiet 10 kHz



Figuur 3.12: Zachte impact: origineel en gefilterd signaal met *cut-off* limiet 10 kHz

Er kan besloten worden dat de impactbelasting $F(t)$ zowel voor harde als zachte impact een frequentie f heeft van 10.000 Hz.

De voortplantingssnelheid van een longitudinale golf in een materiaal wordt gegeven door

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \tag{3.6}$$

Hierin is E de elasticiteitsmodulus en ρ de dichtheid. De voortplantingssnelheid van een longitudinale golf in staal wordt dan

$$c = \sqrt{\frac{210 \cdot 10^9}{7.850}} = 5.172\, m/s$$

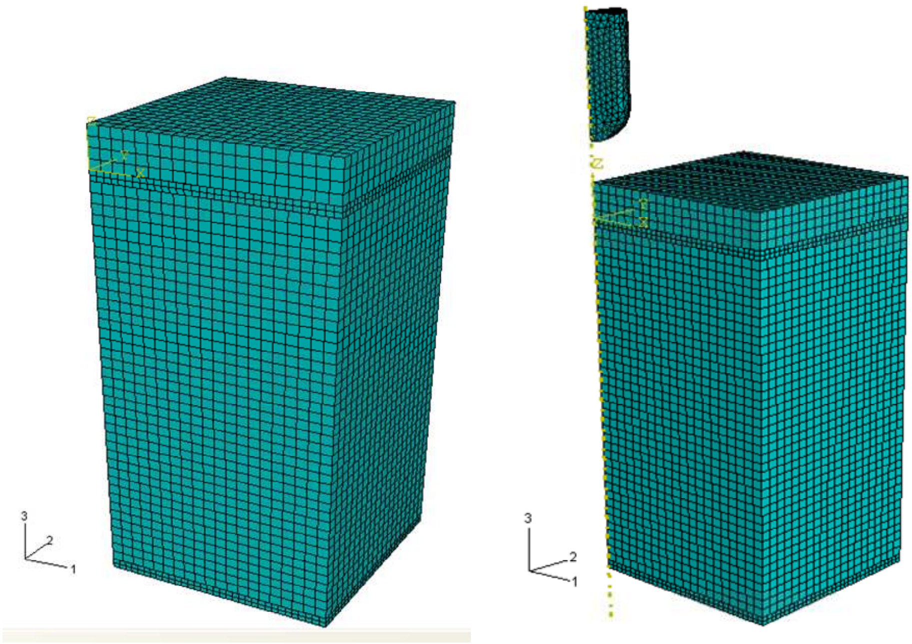
De golflengte is

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{5.172}{10.000} = 0,5172\, m$$

De afmetingen van de elementen worden best beperkt tot de halve golflengte of tot 0,25 m. Deze afmeting zal geen probleem vormen bij het meshen van de onderdelen, omdat ze voldoende groot is.

Elementen

De elementen worden gekozen uit de bibliotheek van ABAQUS/Explicit. Er wordt gekozen voor hexahedrale eerste orde elementen. Alle onderdelen worden gemodelleerd met C3D8R elementen. Dit zijn 8 knopige lineaire *bricks* met gereduceerde integratie. Gereduceerde integratie gebruikt een lagere orde integratie om de stijfheid van de elementen te bepalen. Vooral wanneer men werkt in drie dimensies zorgt dit voor een reductie van de rekentijd. Voor de rubberlagen wordt de *hourglass control* op *enhanced* gezet. *Hourglassing* kan namelijk een probleem vormen bij eerste orde elementen met gereduceerde integratie. Daar deze elementen slechts één integratie punt hebben, is het mogelijk dat ze in een zodanige wijze vervormen dat de rekken berekend in het integratie punt allen nul zijn, wat leidt tot een ongecontroleerde vervorming van de mesh. De mesh van het model met sinus en het model met impactor zijn weergegeven in Figuur 3.13



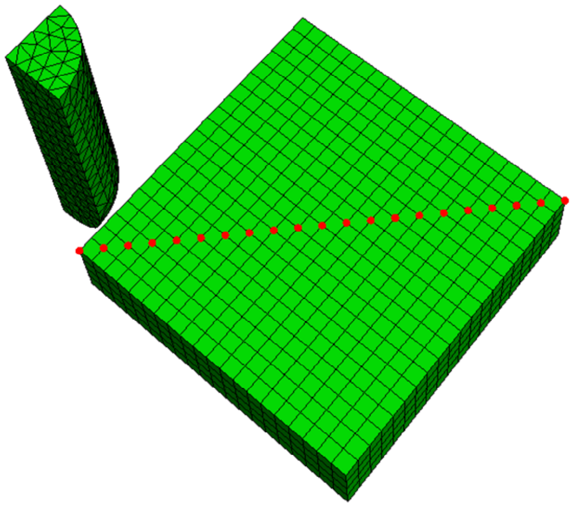
Figuur 3.13: Mesh: (a) Model met sinusbelasting (b) Model met impactor

3.5 Resultaten en bespreking

Zoals aangeduid in Figuur 3.1 worden er 7 modellen gesimuleerd. Het is onmogelijk om alle resultaten van deze simulaties uitvoerig te bespreken, dit zou leiden tot een onoverzichtelijk geheel. Om deze reden worden de resultaten van één model uitvoerig besproken en worden de belangrijkste verschillen met de andere modellen aangehaald. Indien nodig worden bepaalde verschillen toch iets verder uitgewerkt. Er wordt gekozen voor model 7 uit de modellenboom, in dit model wordt een zachte impact gesimuleerd. De impactor wordt mee gemodelleerd en krijgt een elasticiteitsmodulus toegewezen die 1.000 maal kleiner is dan deze van het staal van het aambeeld. Er wordt bewust voor dit model gekozen, omdat dit model het meest realistisch is en tevens de gebruikstoestand simuleert. Het is duidelijk dat bij normaal gebruik van de proefopstelling het crash platform geen onherstelbare schade mag oplopen, dit zal moeten blijken uit de resultaten van model 7. In wat volgt worden eerst de verplaatsingen behandeld en daarna de spanningen.

3.5.1 Verplaatsingen

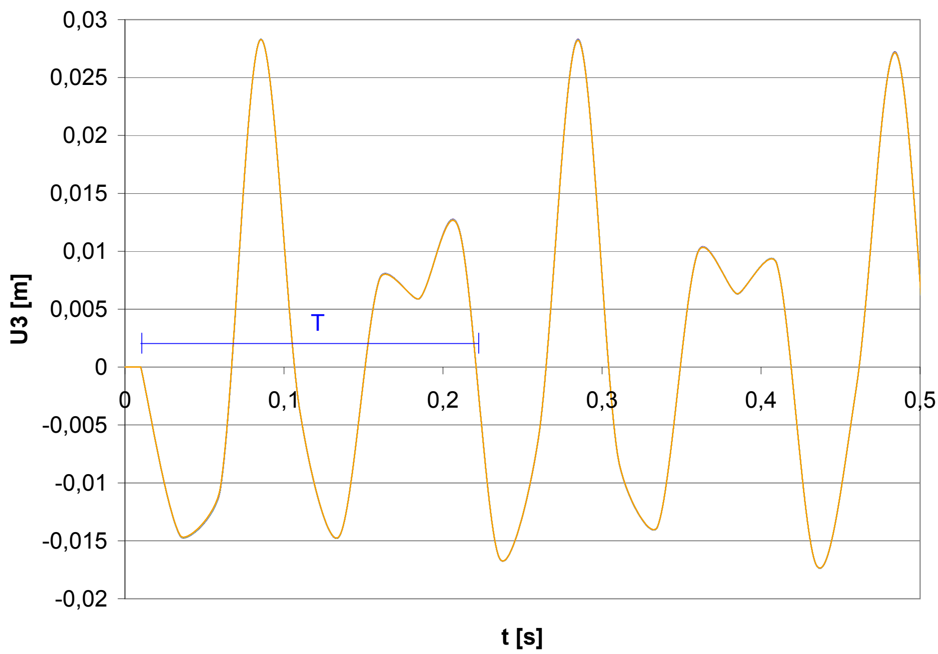
De verplaatsingen worden telkens in verschillende punten geregistreerd, meer bepaald alle punten die op de diagonaal van het aambeeld of funderingsblok liggen. Met de diagonaal wordt bedoelt de lijn die de impactzone met de vrije hoek verbindt. Figuur 3.14 toont de punten die op deze diagonaal liggen.



Figuur 3.14: Geselecteerde punten op de diagonaal

Model 7

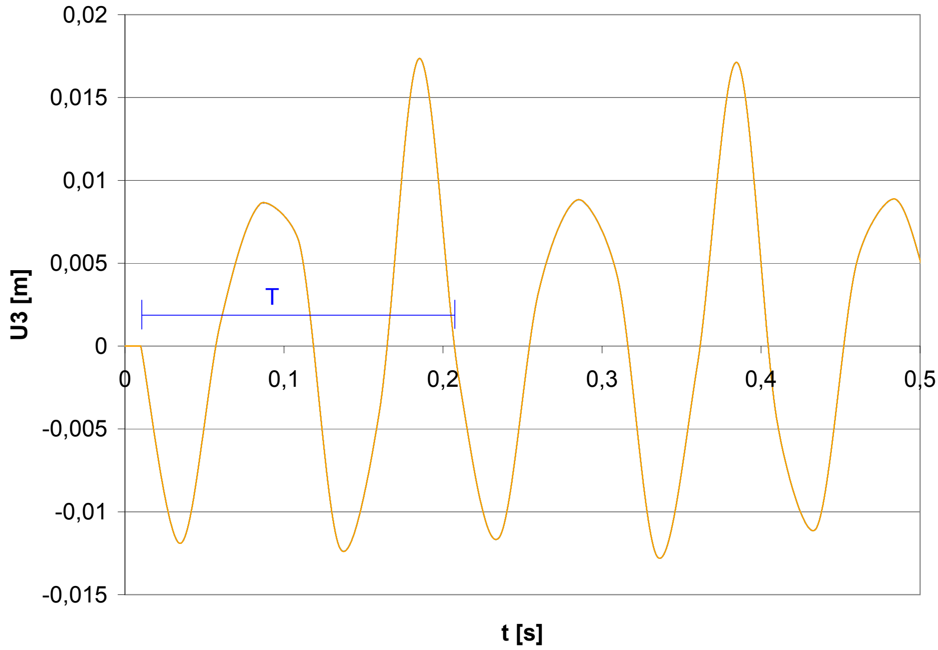
Er wordt gestart met de verplaatsingen van de punten op de diagonaal van het aambeeld, ze worden afgebeeld in Figuur 3.15. De grootheid U3 op de y-as stelt de verticale verplaatsing voor. Er dient opgemerkt te worden dat de totale simulatietijd 0,5 s bedraagt en dat er geen rekening wordt gehouden met de demping, dit is duidelijk zichtbaar op de grafiek. Deze twee opmerkingen gelden voor alle simulaties.



Figuur 3.15: Model 7: verplaatsingen langs de diagonaal van het aambeeld

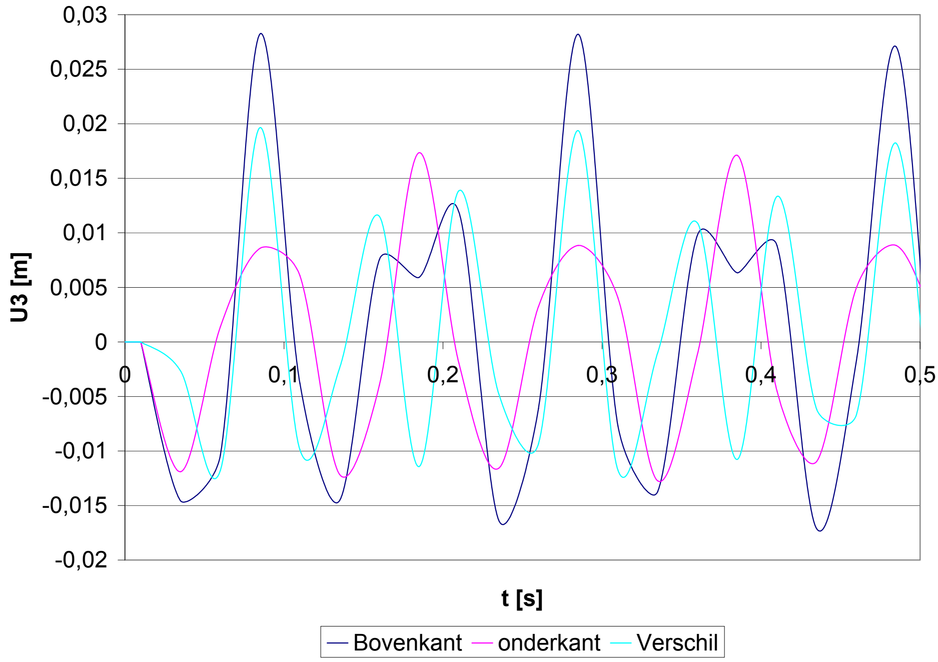
Figuur 3.15 toont de verplaatsingen van alle punten op de diagonaal van het aambeeld, nochtans wordt er slechts één curve afgebeeld, dit komt doordat alle curves op elkaar liggen. Dit betekent dat op elk tijdstip, elk punt dezelfde verplaatsing heeft. Fysisch wil dit zeggen dat het aambeeld als één stijf geheel beweegt. De maximale verplaatsing bedraagt 28,31 mm. Er blijkt ook een bepaalde periodiciteit te bestaan in de vorm van de verplaatsing, de periode T wordt aangeduid in de figuur en bedraagt ongeveer 0,2 s.

Vervolgens worden de verplaatsingen langs de diagonaal van het funderingsblok afgebeeld in Figuur 3.16. Net zoals het aambeeld, beweegt het funderingsblok als één stijf geheel, echter bij het funderingsblok is de maximale verplaatsing 17,35 mm. Er is een verschil in maximale verplaatsing tussen aambeeld en funderingsblok van 11 mm, dit verschil is de verdienste van de rubberlagen. Net zoals bij het aambeeld wordt de trilling gekenmerkt door een periode van ongeveer 0,2 s, aangeduid in Figuur 3.16.



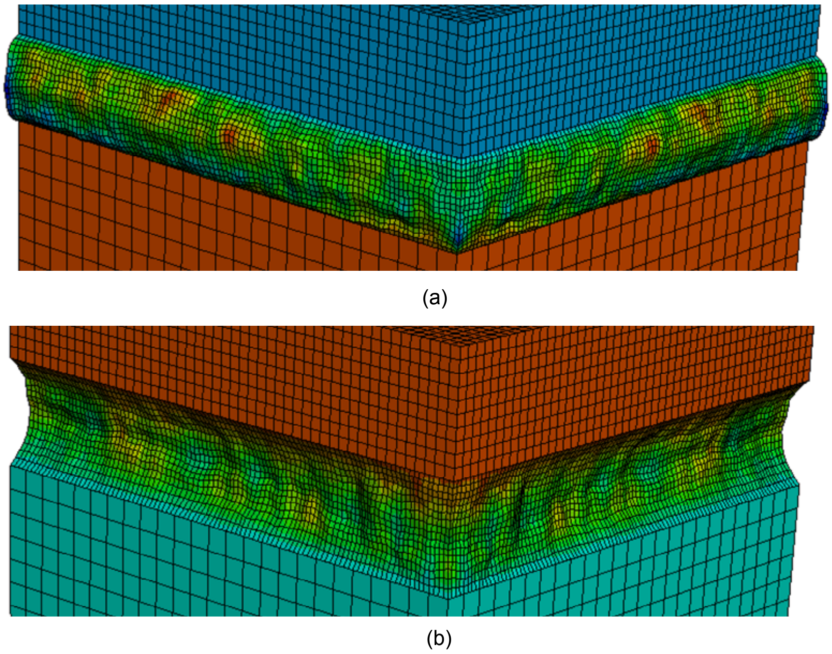
Figuur 3.16: Model 7: verplaatsingen langs de diagonaal van het funderingsblok

Tenslotte worden de verplaatsingen van het rubber in beschouwing genomen. Het aambeeld en funderingsblok bewegen als één stijf geheel, daardoor zal het rubber gelijkmatig samengedrukt of uitgerekt worden. De boven- en onderkant van de rubberlaag tussen aambeeld en funderingsblok zullen respectievelijk de beweging van het aambeeld en het funderingsblok volgen. Het verschil tussen de beweging van de boven- en onderkant is ofwel de samendrukking ofwel de uitrekking, op Figuur 3.17 wordt dit geïllustreerd. Wanneer het verschil negatief is dan wordt het rubber gelijkmatig samengedrukt en bij positieve waarden gelijkmatig uitgetrokken. Uit de figuur blijkt dat het rubber onder het aambeeld maximaal 13,07 mm wordt samengedrukt en maximaal 19,65 mm wordt uitgetrokken. De beweging van de rubberlaag onder het funderingsblok volgt volledig de beweging van het funderingsblok, want de onderkant van deze rubberlaag is verbonden met de bewegingsloze kuip. Dit betekent dat bij een neerwaartse beweging van het funderingsblok, het rubber evenveel gelijkmatig wordt samengedrukt en bij een opwaartse beweging wordt uitgetrokken. Men bekomt een maximale indrukking van 12,72 mm en een maximale uitrekking van 17,34 mm.



Figuur 3.17: Model 7: samendrukking en uitrekking van de rubberlaag onder het aambeeld

In paragraaf 3.4.2 wordt aangehaald dat rubber zo goed als onsamendrukbaar is. Hieruit volgt dat het volume van de rubberlagen niet verandert onder de impactbelasting. Echter uit het voorgaande blijkt dat het rubber samengedrukt en uitgetrokken wordt, het samengedrukt (of uitgetrokken) volume rubber moet ergens anders gecompenseerd worden. Deze compensatie gebeurt aan de vrije randen en wordt duidelijk geïllustreerd in Figuur 3.18. In de figuur worden de verticale verplaatsingen afgebeeld, het aambeeld en funderingsblok hebben één kleur, wat nogmaals bevestigt dat ze als één stijf geheel bewegen. Wanneer de rubberlaag samengedrukt wordt (Figuur 3.18(a)) dan puilt het rubber als het ware uit. De maximale uitpuiling komt voor wanneer de rubberlaag maximaal samengedrukt wordt, en bedraagt 24,62 mm. Wanneer daarentegen de rubberlaag uitgetrokken wordt (Figuur 3.18(b)) dan beweegt de zijkant van het rubber naar binnen. Deze beweging is maximaal als de uitrekking maximaal is en bedraagt 33,94 mm. Deze waarden horen bij de rubberlaag onder het aambeeld, uiteraard gebeurt hetzelfde met de rubberlaag onder het funderingsblok, maar met als maximale uitpuiling 21,18 mm en een maximale beweging naar binnen van 29,86 mm. Dit effect treedt niet op bij de niet-vrije randen, maar dit is het gevolg van de opgegeven randvoorwaarden.



Figuur 3.18: Model 7: zijdelingse verplaatsingen van het rubber (a) samendrukking (b) uitrekking

Vergelijking met de andere modellen

Om gemakkelijk de modellen te vergelijken, worden alle piekwaarden van de verplaatsingen gebundeld in Tabel 3.1.

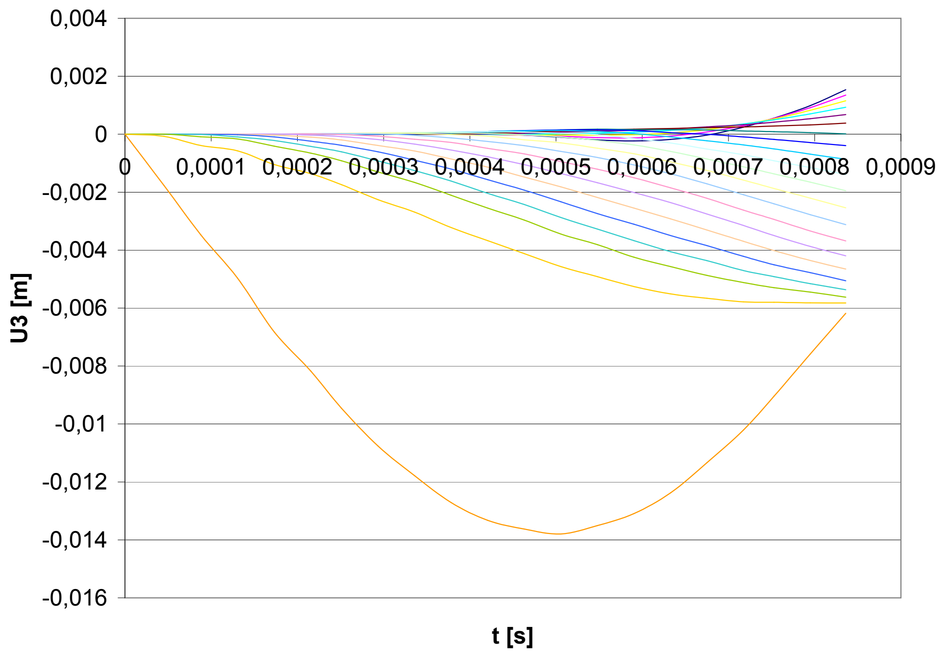
Piekverplaatsingen			
Modelnr	Aambeeld [mm]	Funderingsblok [mm]	Periode T [s]
1	26,73	16,70	0,2
2	nvt	nvt	nvt
3	24,80	16,57	0,2
4	24,88	16,57	0,2
5	21,73	12,77	0,2
6	15,09	9,38	0,2
7	28,31	17,35	0,2

Tabel 3.1: Vergelijkingstabel piekwaarden

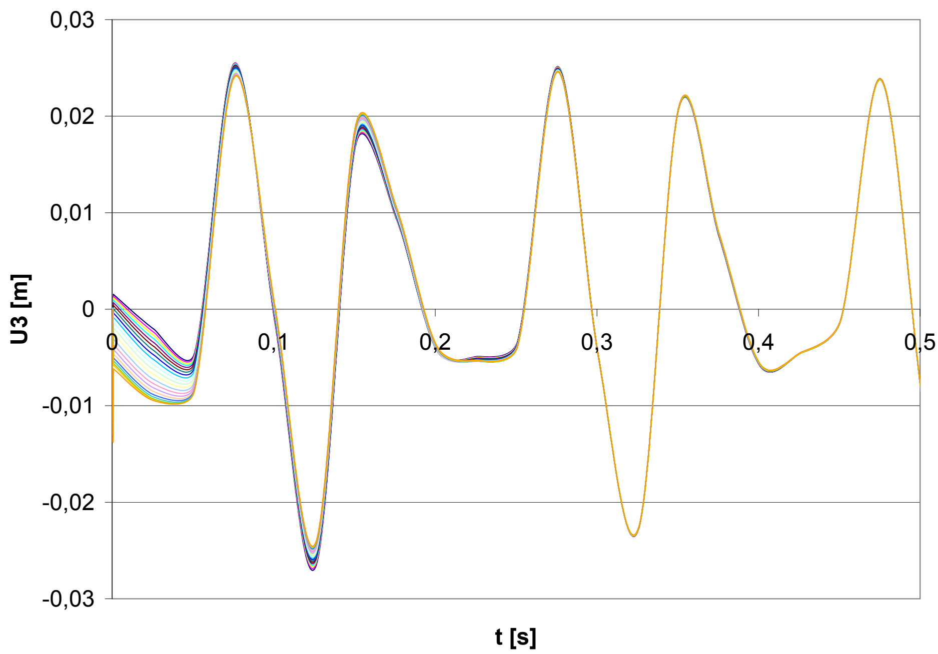
In deze tabel wordt ook de periode gegeven, de periode blijkt bij ieder model ongeveer 0,2 s te zijn. Model 2 geeft geen resultaten ten gevolge van een *error* die te wijten is aan het feit dat de verhouding van de vervormingssnelheid tot golfsnelheid de waarde 1 overschrijdt.

Model 5 simuleert een harde impact, waarbij de impactor en het aambeeld uit hetzelfde materiaal bestaan (staal elastisch). Als dit model vergeleken wordt met een zachte impact (model 7) dan valt op dat de zachte impact grotere verplaatsingen teweeg brengt. Dit komt doordat het contact tussen de impactor en het aambeeld langer aanhoudt, daardoor kan er als het ware meer energie overgedragen worden naar het aambeeld, met grotere verplaatsingen als gevolg. Ook in model 5 gedragen aambeeld en funderingsblok zich als één stijf geheel wat de verplaatsingen betreft.

Bij model 1, waar een harde impact gesimuleerd wordt met behulp van een sinusbelasting, wordt voor de eerste maal opgemerkt dat het aambeeld zich niet meer verplaatst als één stijf geheel, dit komt tot uiting in Figuur 3.19 en Figuur 3.20. In Figuur 3.19 stellen de curven van onder naar boven de punten voor vertrekkend van het punt onder de impactor.



Figuur 3.19: Model 1: verplaatsingen langs de diagonaal van het aambeeld tijdens impact

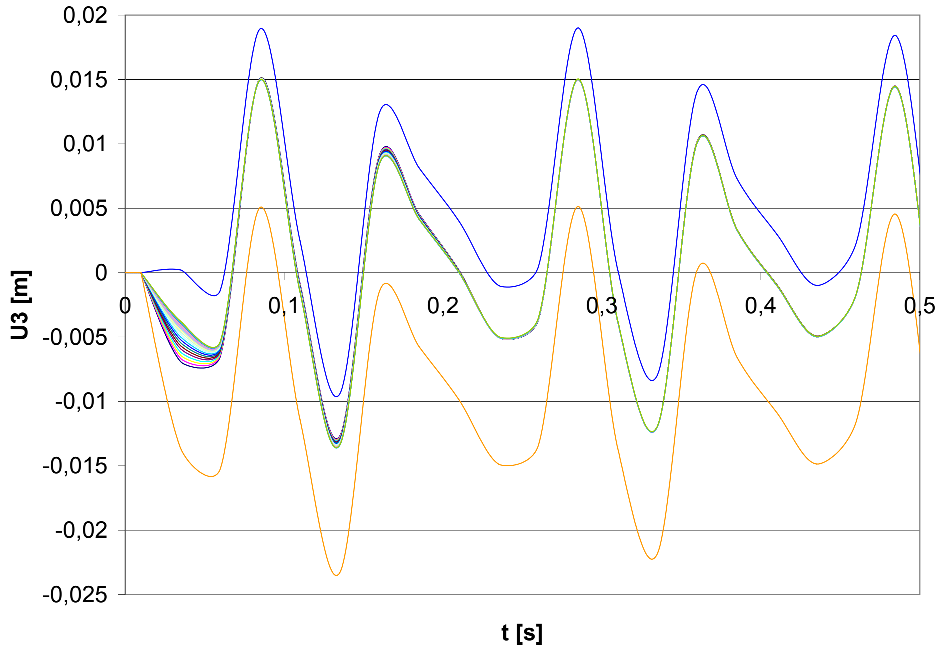


Figuur 3.20: Model 1: verplaatsingen langs de diagonaal van het aambeeld na impact

In Figuur 3.19 komt de curve met de grootste verplaatsingen (oranje) overeen met het punt net onder de sinusbelasting. Doordat de sinusbelasting een puntbelasting is, zijn de verplaatsingen in het aangrijpingspunt groter dan in de andere punten. Naarmate men zich verder verwijdert van dit punt, worden de verplaatsingen kleiner en bovendien voelen deze punten de impact later dan het punt net onder de impactbelasting. Dit komt doordat de spanningsgolf zich steeds verder voortplant, waardoor het verste punt als laatste in beweging komt. Echter in Figuur 3.20 ziet men duidelijk dat het verschil in verplaatsingen op de diagonaal van het aambeeld reeds na ongeveer 0,05 s verdwijnt en daarna gedraagt het aambeeld zich terug als één stijf geheel.

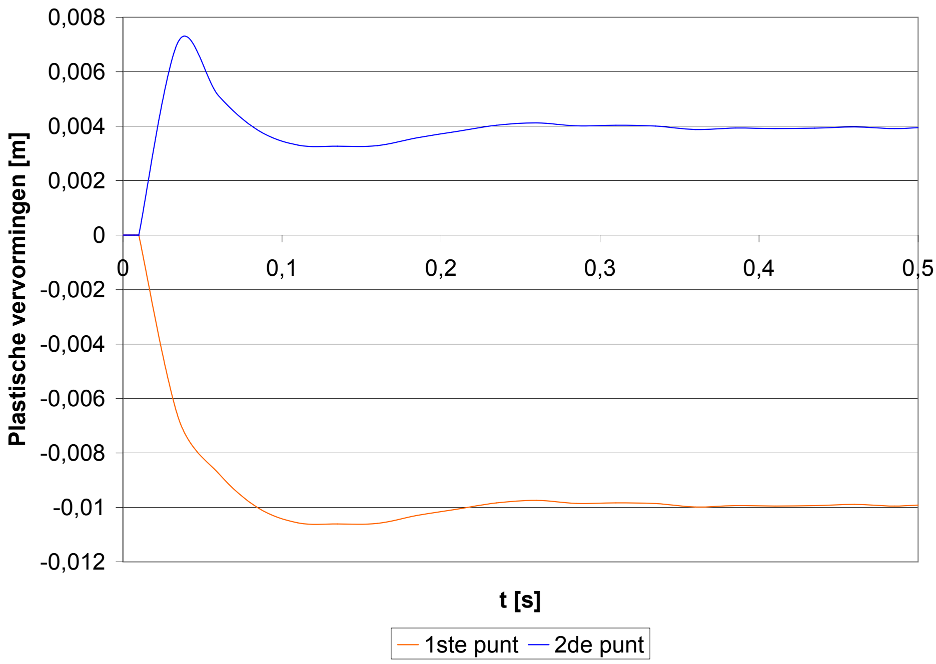
Nu kan ook de link gelegd worden tussen de twee types modellen. Als bijvoorbeeld model 1 (harde impact als sinusbelasting) met model 5 (harde impact door impactor mee te modelleren) vergeleken wordt, dan blijkt dat model 1 grotere verplaatsingen oplevert, dus dat de sinusbelasting de harde impact overschat. Indien model 3 (zachte impact als sinusbelasting) met model 7 (zachte impact door impactor mee te modelleren) wordt vergeleken, dan blijkt model 7 grotere verplaatsingen te genereren. Er blijkt dat de sinusbelasting een zachte impact onderschat. Echter de verschillen bij zowel een harde als een zachte impact zijn niet overdreven groot, dus de benadering van een impact door een sinusbelasting lijkt gerechtvaardigd.

Bij alle reeds behandelde modellen wordt het staal van het aambeeld steeds als volkomen elastisch gemodelleerd. Om de invloed van elastisch-plastisch materiaalgedrag op de resultaten te onderzoeken moeten model 5 (elastisch materiaalgedrag) en model 6 (elastisch-plastisch materiaalgedrag) met elkaar vergeleken worden. Uit Tabel 3.1 blijken de verplaatsingen sterk af te nemen bij elastisch-plastisch materiaalgedrag. In Figuur 3.21 wordt de invloed van het elastisch-plastisch materiaalgedrag duidelijk.

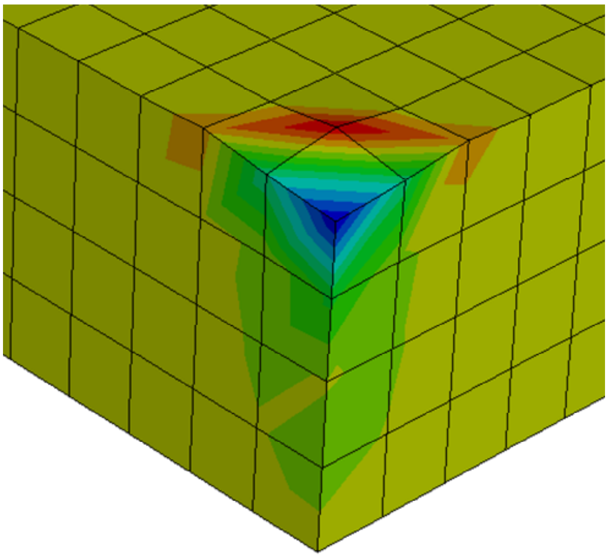


Figuur 3.21: Model 6: verplaatsingen langs de diagonaal van het aambeeld

In deze grafiek worden de verplaatsingen van alle punten langs de diagonaal van het aambeeld voorgesteld, nochtans zijn er slechts drie duidelijke curven te onderscheiden. De oranje curve stelt het eerste punt van de diagonaal voor, dus in de impactzone. De blauwe curve stelt het punt er net naast voor. De derde curve toont alle andere punten, deze curves liggen zo goed als op elkaar. Deze curve geeft in feite de globale beweging van het aambeeld weer. Het verschil tussen deze curve en de andere twee curves stelt de lokale plastische vervormingen voor, dit verschil wordt geïllustreerd in Figuur 3.22. Opnieuw stelt de oranje curve het eerste punt voor en de blauwe curve het punt ernaast. Beide vervormingen lopen op tot een piekwaarde en nemen vervolgens lichtjes af om uiteindelijk constant te blijven. De afname is te wijten aan de elastische terugvering. De plastische vervormingen zijn het gevolg van het overschrijden van de vloeispanningen. Het valt ook op dat beide vervormingen tegengesteld van teken zijn, dit komt doordat het tweede punt opgeduwd wordt ten gevolge van materiaalverdringing. Dit is duidelijk zichtbaar op Figuur 3.23. Er kan tenslotte besloten worden dat het eerste punt 10 mm plastisch ingedrukt wordt en het tweede punt 4 mm plastisch opgeduwd wordt. Deze plastische vervormingen liggen ook aan de basis van het verschil van de verplaatsingen tussen model 5 en model 6, want er gaat veel energie verloren in het plastisch vervormen van het aambeeld, waardoor er minder energie overblijft om het aambeeld in zijn geheel te verplaatsen. Uit deze beschouwingen volgt ook dat er bij een harde impact, dus in het accidentele geval, onvermijdelijk oppervlakkige schade zal optreden.



Figuur 3.22: Model 6: plastische vervormingen



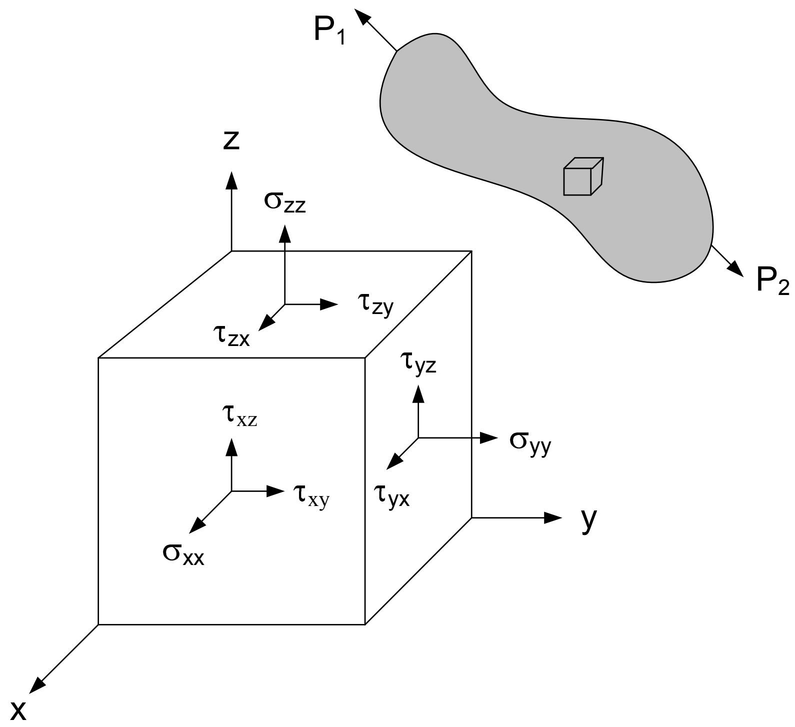
Figuur 3.23: Model 6: plastische vervormingen in de impactzone

De bovenstaande vergelijking wordt ook gemaakt tussen model 3 en model 4 om de invloed van elastisch-plastisch materiaalgedrag op een zachte impact te controleren. Bij deze zachte impact blijken de spanningen steeds onder de vloeispanning te blijven waardoor er geen plastische vervormingen optreden. Concreet betekent dit dat beide modellen dezelfde resultaten zouden moeten geven, de verplaatsingen uit Tabel 3.1 beamen dit.

3.5.2 Spanningen

In tegenstelling tot de analytische berekening, is het met het eindige-elementenpakket ABAQUS mogelijk om de optredende spanningen te laten optekenen in de verschillende onderdelen. Er zal gekeken worden naar de von Mises spanningen in het aambeeld, de S33 spanningen in het funderingsblok en de maximale hoofdspanningen in de rubberlagen. Net zoals bij de verplaatsingen zal de bespreking gebeuren aan de hand van het basismodel (model 7) en worden er linken gelegd met de andere modellen.

De spanning [20] is een grootheid die gebruikt wordt om de inwendige krachtwerking binnen een materiaal te beschrijven. In een drie dimensionaal voorwerp, kan de interne kracht die werkt op een zeer klein oppervlak dA van een vlak dat gaat door een willekeurig punt in het materiaal opgesplitst worden in drie componenten: een component die loodrecht staat op het vlak, de normale spanning σ en twee componenten die evenwijdig zijn met het vlak, de schuifspanningen τ (Figuur 3.24).



Figuur 3.24: Spanningstensor

De drie dimensionale spanningstensor wordt dan gedefinieerd als

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \tag{3.7}$$

Het is steeds mogelijk om twee orthogonale vlakken te lokaliseren waar de schuifspanningen nul zijn. Deze vlakken waarop de normale krachten werken, worden de hoofdvlakken genoemd, terwijl de normale spanningen op deze vlakken de hoofdspanningen zijn.

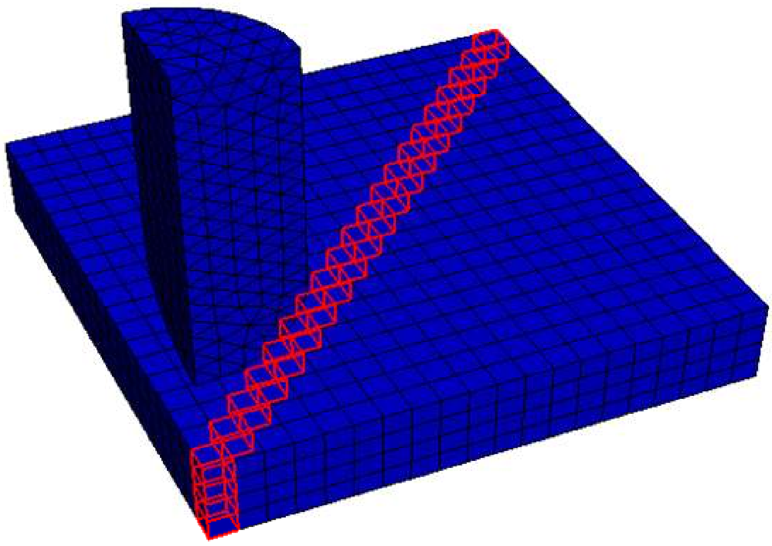
De von Mises spanning σ_v is een scalaire functie van de componenten van de spanningstensor die een waardering geeft van de grootte van de spanningstensor. Het is een eenvoudige manier om de spanningen in drie dimensies te combineren en het breukcriteria te controleren. Op deze wijze kan de sterkte van een materiaal in een drie dimensionale staat van spanningen vergeleken worden met een proefstuk dat belast werd in één dimensie. In drie dimensies kan de von Mises spanning uitgedrukt worden als

$$\sigma_v = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_{xx}-\sigma_{yy})^2+(\sigma_{yy}-\sigma_{zz})^2+(\sigma_{zz}-\sigma_{xx})^2+6(\tau_{xy}^2+\tau_{yz}^2+\tau_{zx}^2)} \tag{3.8}$$

Volgens het criterium van Huber-Hencky-von Mises ontstaat een blijvende vervorming zodra σ_v een materiaal kenmerkende grenswaarde overtreft, voor staal is dit de vloeigrens f_y.

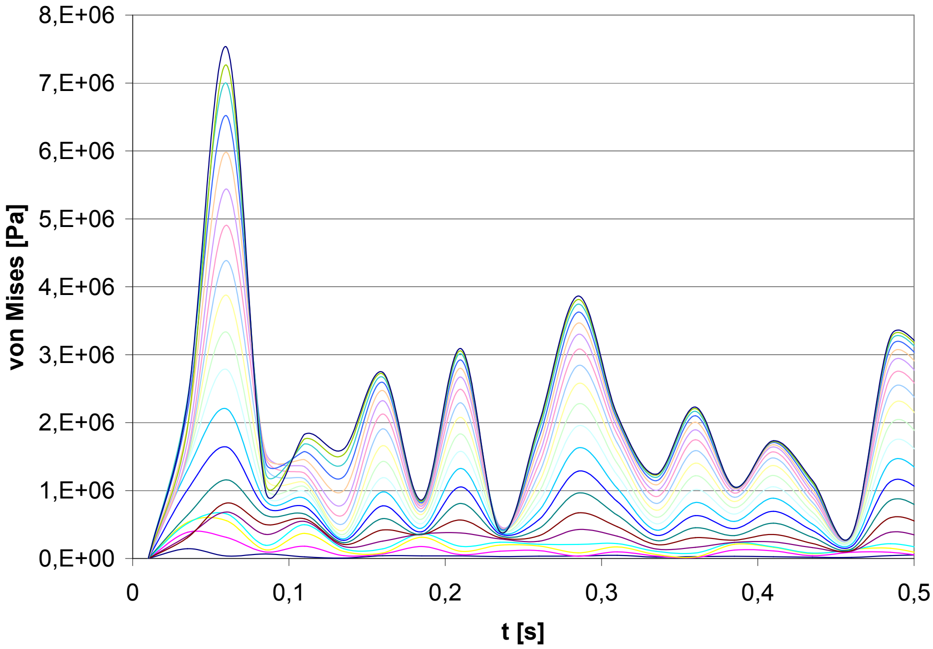
Aambeeld

In het aambeeld wordt gekeken naar het verloop van de von Mises spanningen in de tijd. Er worden twee grafieken opgetekend: de eerste geeft een beeld van de von Mises spanning langsheen de diagonaal van de bovenkant van het aambeeld, de tweede toont de von Mises spanning over de dikte van het aambeeld onder de zone waar de impactor inslaat op het aambeeld. De geselecteerde elementen worden afgebeeld in Figuur 3.25.



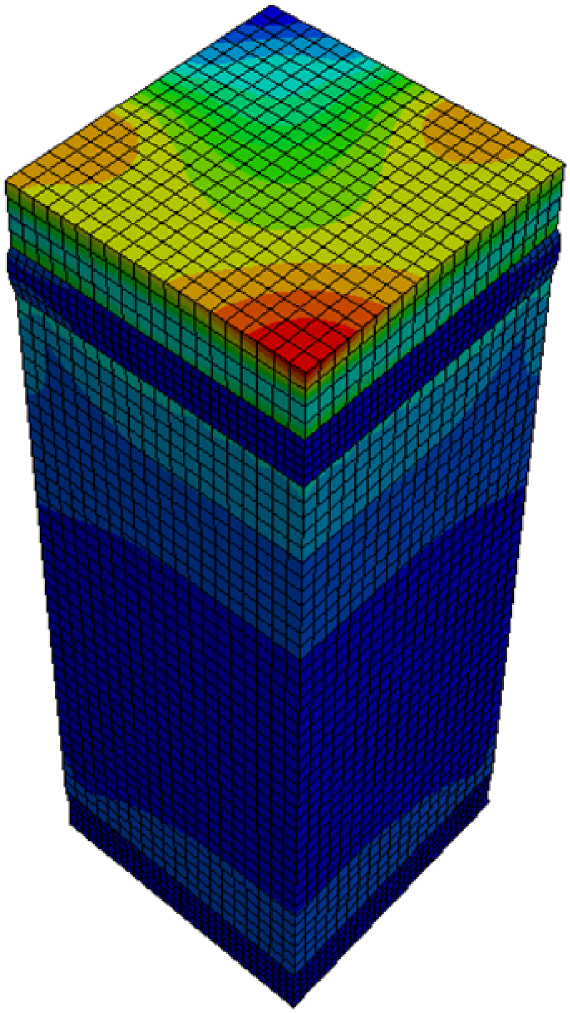
Figuur 3.25: Geselecteerde elementen voor de von Mises spanning in het aambeeld

Figuur 3.26 toont het verloop van de von Mises spanningen in de tijd langs de diagonaal van het aambeeld. Tijdens de eerste 0,01 s zijn de spanningen nul want dan zit men nog in de *Step Shoot*, nadien impacteert de impactor op het aambeeld en ontstaat er een eerste piek in het spanningsbeeld. Deze piek is uiteraard het grootst in het element vlak onder de impactor, de piek daalt naarmate de elementen verder van de impactzone verwijderd zijn.



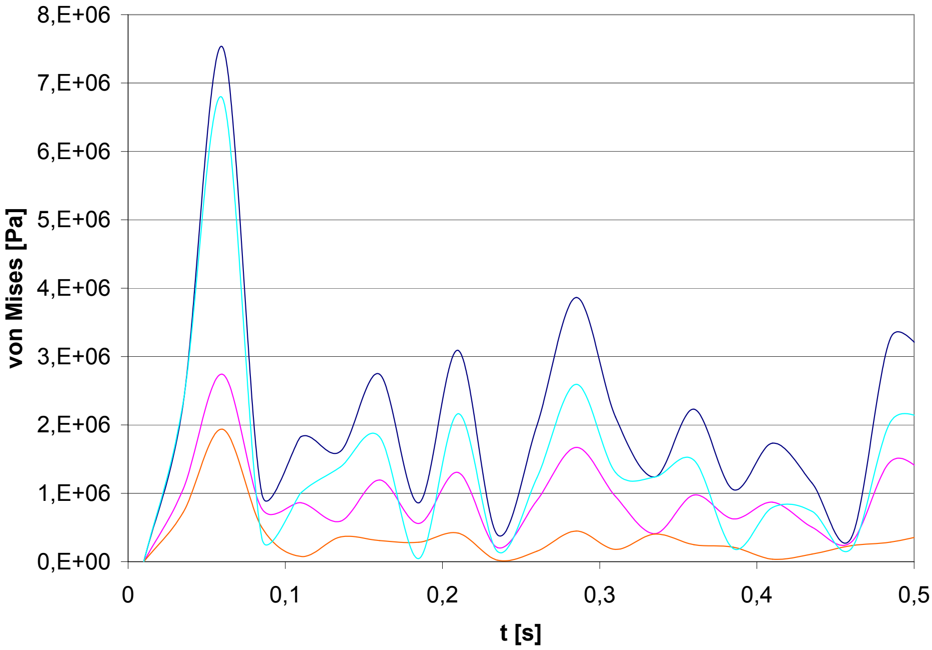
Figuur 3.26: Model 7: von Mises spanningen langs de diagonaal van het aambeeld

De grootste waarde van de von Mises spanning in de eerste piek bedraagt 7,53 MPa en vormt geen probleem met betrekking tot plastische vervormingen want de vloeispanning bedraagt 235 MPa. Na deze eerste piek valt de spanning in het aambeeld terug en treedt in alle elementen een golvende beweging van de von Mises spanning op. De golvende beweging kan als volgt verklaard worden: wanneer men kijkt naar de von Mises spanningen in het volledige crash platform (aambeeld, rubber en funderingsblok) dan blijkt dat de grootste spanningen in het aambeeld optreden en niet doorgegeven worden naar het funderingsblok. Een beeld hiervan is te zien in Figuur 3.27. De rubberlaag tussen het aambeeld en funderingsblok isoleert als het ware de spanningen in het aambeeld. Hierdoor blijft de spanningsgolf die ontstaat ten gevolge van de impact voor het grootste gedeelte in het aambeeld. Deze golf plant zich voort langsheen de diagonaal en over de diepte. Wanneer de golf aan de randen van het aambeeld gekomen is, wordt hij teruggekaatst en kan interferentie ontstaan met een golf die zich nog aan het voortplanten is in de andere richting. Dit verklaart de pieken en dalen die aanwezig zijn in Figuur 3.26 na de eerste piek.



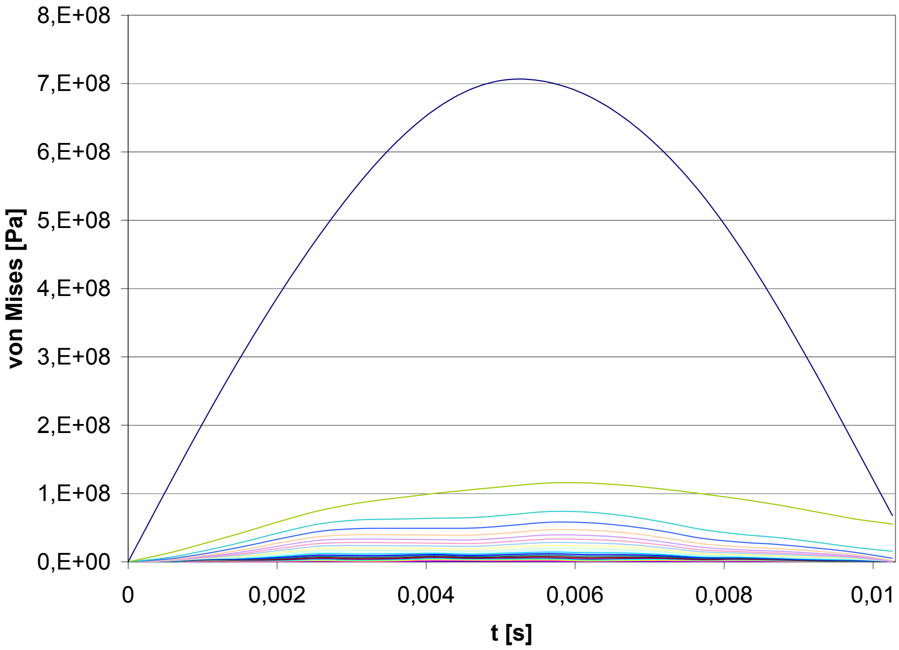
Figuur 3.27: Model 7: Isolatie van de von Mises spanningen in het aambeeld

Figuur 3.28 geeft het verloop van de von Mises spanningen in de tijd over de dikte van het aambeeld onder de impactzone. Het verloop is vrij gelijkaardig aan dit in Figuur 3.26 en dezelfde vaststellingen kunnen gemaakt worden. De eerste twee elementen onder de impactzone vertonen een grote eerste piek, voor de volgende twee elementen is de eerste piek reeds sterk gereduceerd. De elementen hebben een hoogte van 5 cm, inderdaad vier elementen over een dikte van 20 cm van het aambeeld, en bijgevolg zal de impact vooral voelbaar zijn over een dikte van 10 cm van het aambeeld.



Figuur 3.28: Model 7: von Mises spanningen over de dikte van het aambeeld onder de impactzone

Na de bespreking van de von Mises spanningen in het aambeeld van het basismodel, kan een vergelijking gemaakt worden met de andere modellen. Het model 3 uit de modellenboom simuleert eveneens een zachte impact en in beide modellen wordt gewerkt met een elastisch materiaalgedrag. Het enige verschil is dat de impactbelasting $F(t)$ gemodelleerd is als een sinusbelasting in model 3. Het verloop van de von Mises spanningen in functie van de tijd langs de diagonaal van het aambeeld kent een gelijkaardig verloop als in het basismodel, namelijk eerst een grote piekwaarde, gevolgd door een golvend verloop van de spanningen. Het golvend verloop van de spanningen is gekenmerkt door pieken die steeds kleiner worden naarmate de tijd vordert. De spanningsgolf sterft uit naarmate de tijd vordert. Op 0,45 s treedt er maar een piek meer op met een waarde van 3,25 MPa onder de impactbelasting. Dit gelijkmatig dalen van de pieken kan niet vastgesteld worden in het basismodel (Figuur 3.26). De eerste grote piek die optreedt in het model met de sinusbelasting (model 3) heeft een maximale waarde van 700 MPa en treedt op net onder de impactbelasting (het impactpunt). Deze waarde is zeer groot en is het gevolg van het feit dat de impactbelasting ingegeven wordt als een puntbelasting. Onder dit impactpunt zullen er dan ook zeer grote spanningen ontstaan. In werkelijkheid zal de impactor die inslaat op het aambeeld een groter oppervlak bestrijken waardoor de spanningen meer gespreid worden dan in het geval van een puntbelasting. De eerste piekwaarde van de von Mises spanning is in het vijfde element van de diagonaal, vertrekkend van het impactpunt, in model 3 reeds gedaald tot 47 MPa. Het verloop van de von Mises spanningen tijdens de *Step Impact* van model 3 is te zien in Figuur 3.29. Tijdens deze stap grijpt de sinusbelasting op het aambeeld aan, dezelfde sinusvorm vindt men terug in het spanningsverloop. De eerste piek treedt op tijdens deze stap en heeft de eerder vermelde maximale waarde van 700 MPa in het impactpunt. In het element ernaast is de eerste piekwaarde al gedaald tot 115 MPa (Figuur 3.29).



Figuur 3.29: Model 3: von Mises spanningen langs de diagonaal van het aambeeld tijdens *Step Impact*

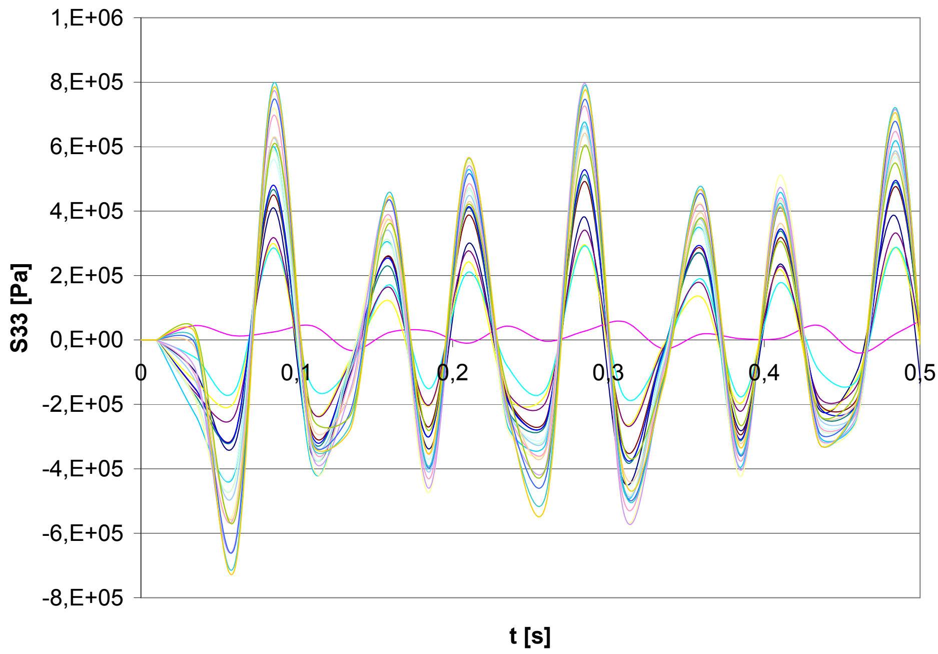
Er moet ook nog gekeken worden naar de von Mises spanningen bij een harde impact. Hiervoor wordt gebruik gemaakt van model 5 uit de modellenboom waarbij de impactor mee gemodelleerd is en het overeenkomstige model met sinusbelasting (model 1). Wanneer gekeken wordt naar het verloop van de von Mises spanningen langs de diagonaal van het aambeeld dan is hetzelfde verloop vast te stellen als bij de zachte impact, met name een eerste piek die ontstaat door de impact, gevolgd door een golvend verloop waarbij de spanningen afnemen. Dit kan in beide modellen vastgesteld worden. De maximale piekwaarde in het model met de sinusbelasting bedraagt 8000 MPa op ongeveer 0,0004 s en treedt op onder het impactpunt. Deze waarde is extreem hoog maar dit komt opnieuw door het ingeven van een geconcentreerde puntkracht.

Na deze eerst piek treedt er nog een kleine piek op van ongeveer 110 MPa op 0,15 s, vervolgens daalt de von Mises spanning tot 20 MPa op 0,30 s. Behalve gedurende de *Step Impact* zijn de spanningen aanvaardbaar met een maximum van 110 MPa. In het model waar de impactor mee gemodelleerd is (model 5) treedt hetzelfde spanningsverloop op, waarbij tijdens de impact de spanningen lokaal hoog oplopen. De piekwaarden zijn weliswaar kleiner dan bij model 1, maar dit is opnieuw te wijten aan het ingeven van de kracht als een puntbelasting in model 1. Ten gevolge van deze hoge lokale spanningen zullen er plaatselijk plastische vervormingen optreden, zoals aangetoond in paragraaf 3.5.1.

Funderingsblok

Voor het analyseren van de spanningen in het funderingsblok, wordt gebruik gemaakt van de S33 spanningen. Dit zijn de normale spanningen volgens de verticale as. Deze spanningen worden gehanteerd omdat het beton moet gecontroleerd worden op trek en druk. Men zou ook kunnen kijken naar de maximale en minimale hoofdspanningen, maar de extrema van deze spanningen zijn eveneens de extrema van de S33 spanningen. Figuur 3.30 toont het verloop van de S33 spanningen in de tijd langs de diagonaal van het funderingsblok (in analogie met het aambeeld). Het S33 spanningsbeeld heeft een oscillatie vorm net als de verplaatsingen van het funderingsblok (U3). Positieve waarden van S33 zijn trekspanningen en negatieve waarden zijn drukspanningen. De maximale trekspanning bedraagt 0,80 MPa en de maximale drukspanning is 0,71 MPa.

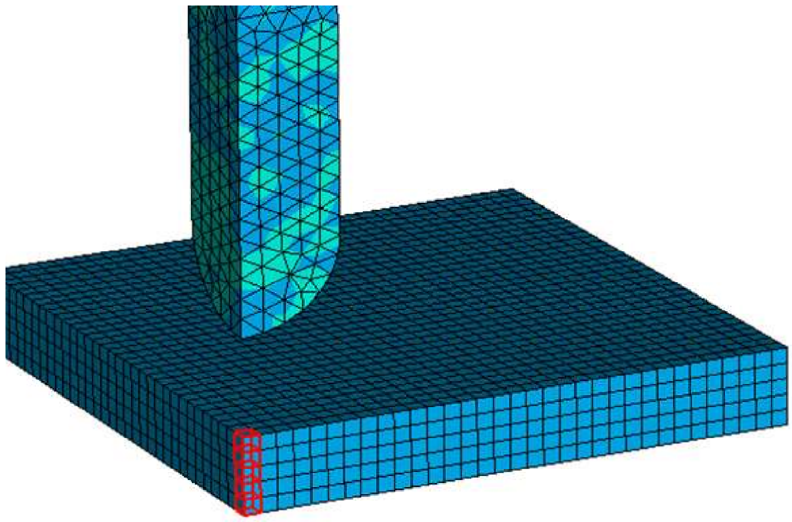
Beton, het materiaal van het funderingsblok, kan goed drukspanningen opnemen en de maximaal optredende waarde zal zeker geen probleem vormen. Inderdaad beton van sterkteklasse C25/30, welke in de meeste gevallen wordt voorgeschreven om te voldoen aan de eisen van sterkte en duurzaamheid voor toepassing in gebouwen [14], heeft een karakteristieke druksterkte f_{ck} van 25 MPa en is groter dan de maximaal optredende drukkracht. Beton dient niet voor het opnemen van trekspanningen maar het heeft toch een beperkte treksterkte f_{ct} die kan gelijkgesteld worden aan 0,1 keer de druksterkte van het beton [14]. Voor een beton C25/30 is dit een treksterkte van 2,5 MPa. Hieruit volgt dat de trekspanningen theoretisch al door het beton kunnen opgenomen worden. Toch zal het beton zeker moeten voorzien worden van een minimumwapening. Er kan bijgevolg geconcludeerd worden dat de spanningen in het beton geen gevaar vormen. Dit wordt eveneens vastgesteld in de andere modellen. De verklaring voor de lage spanningen in het beton is al aangehaald bij de bespreking van de von Mises spanningen in het aambeeld. De rubberlaag tussen aambeeld en funderingsblok zorgt er namelijk voor dat de spanningen in het staal blijven en niet doorgegeven worden aan het beton. Het nut van het betonnen funderingsblok is het creëren van massa om de verplaatsingen te beperken niet voor het opnemen van de spanningen.



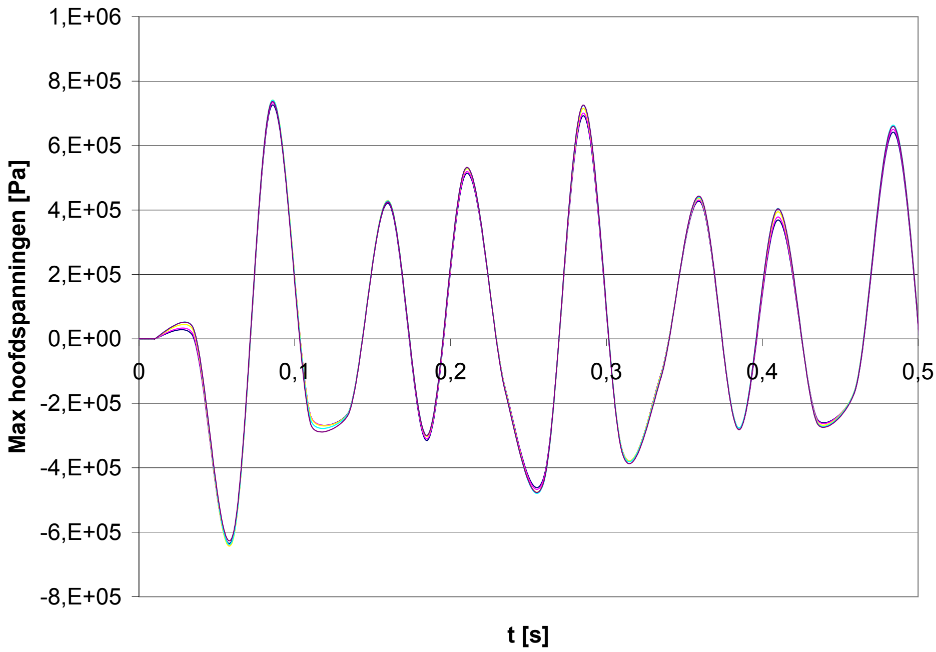
Figuur 3.30: Model 7: S33 spanningen langs de diagonaal van het funderingsblok

Rubberlagen

De rubberlagen tussen het aambeeld en funderingsblok en onder het funderingsblok zijn een 8% sulfur rubber, waarvan het hyperelastisch gedrag onder een biaxiale trekproef beschreven is in Bijlage D, Figuur D.1. Deze figuur geeft het verloop van de nominale spanningen in functie van de nominale rek. Om het rubber te beoordelingen qua spanningen, moet er beroep gedaan worden op die spanningen die het dichtst aanleunen bij de nominale spanningen uit de biaxiale trekproef. De maximale hoofdspanningen in het rubber komen hiervoor het best in aanmerking. De grootste spanningen in het rubber onder het aambeeld, treden op in het punt onder de impactor vandaar dat de maximale hoofdspanningen in functie van de tijd uitgezet worden voor de elementen in het rubber onder de impactor (Figuur 3.31). Het resultaat is voorgesteld in Figuur 3.32.



Figuur 3.31: Geselecteerde elementen voor de maximale hoofdspanningen in de eerste rubberlaag

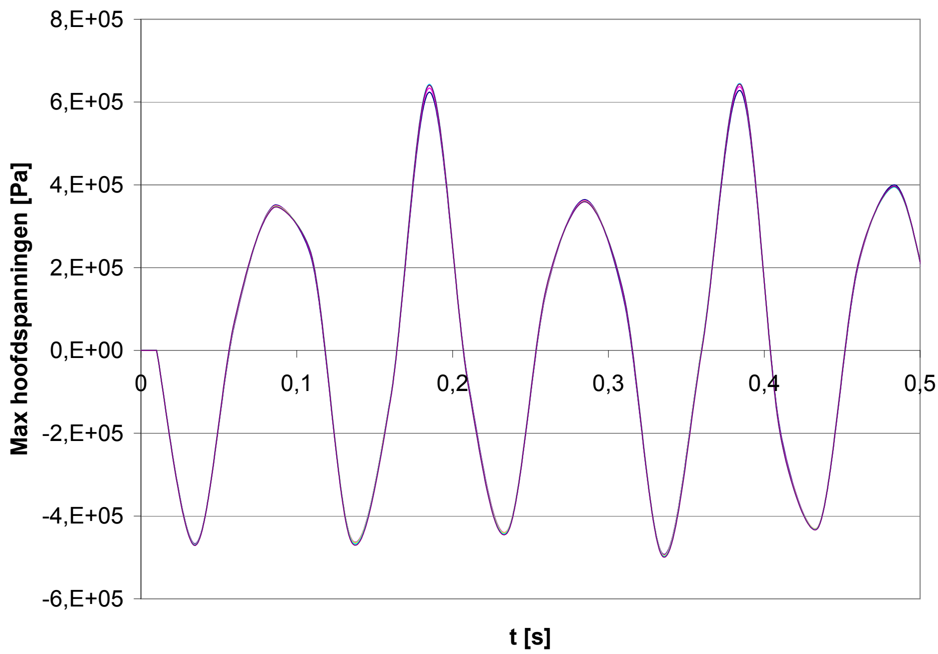


Figuur 3.32: Model 7: Maximale hoofdspanningen over de dikte van de eerste rubberlaag

Met negatieve spanningen komt een samendrukking van het rubber overeen en met een positieve spanning een uitrekkking van het rubber. Deze samendrukking en uitrekking kan gevonden worden in Figuur 3.17 meer bepaald de curve die het verschil geeft. Het verloop van de maximale hoofdspanningen in de eerste rubberlaag (Figuur 3.32) is analoog als de curve die het verschil aangeeft in Figuur 3.17.

De maximale hoofdspanningen vertonen een oscillatie vorm met als maximale waarde 0,74 MPa. De spanningen in de eerste rubberlaag liggen in het eerste gedeelte van het spannings-rek diagram in Figuur D.1. In paragraaf D.2 van Bijlage D is aangetoond, dat wanneer de spanningen in het rubber beperkt blijven tot 0,50 MPa, hetgeen dus voor de eerste rubberlaag met uitzondering van een paar waarden voldaan is, dit gedeelte van het spannings-rekdiagram kan benaderd worden met een elasticiteitsmodulus van 2.204.301 Pa. Dit wil zeggen dat het rubber dat gebruikt wordt voor de analytische berekeningen (Hoofdstuk 2 paragraaf 2.6), namelijk met een elasticiteitsmodulus van 2.000.000 Pa overeenkomt met dit rubber. Deze elasticiteitsmodulus wordt samen met de veerconstante gebruikt om de dikte van de rubberlagen (0,16 m) te bepalen die ingegeven wordt in het model in ABAQUS.

Voor de tweede rubberlaag, gelegen onder het funderingsblok, kunnen eveneens de maximale hoofdspanningen uitgezet worden in functie van de tijd. Het resultaat is weergegeven in Figuur 3.33.



Figuur 3.33: Model 7: Maximale hoofdspanningen over de dikte van de tweede rubberlaag

De maximale waarde die voorkomt is 0,64 MPa, waardoor dezelfde conclusie kan getrokken worden als voor de eerste rubberlaag. In de analystische berekeningen is voorgesteld om voor de tweede elastische laag luchtveren te gebruiken (Hoofdstuk 2 paragraaf 2.6). Het modelleren van luchtveren in ABAQUS is niet zo eenvoudig vandaar dat er in de modellen voor gekozen is om de tweede elastische laag eveneens te modelleren als rubber.

Het overeenkomstige model, waarbij de impactbelasting ingegeven wordt als een sinusbelasting (model 3), heeft een maximale hoofdspanning van 0,65 MPa in de eerste rubberlaag en 0,53 MPa in de tweede rubberlaag. Deze resultaten zijn bijgevolg gelijklopend met het basismodel. Wanneer de resultaten bekeken worden van de modellen waarbij een harde impact gesimuleerd wordt (model 2 en 5) dan treedt een maximale hoofdspanning op van 0,93 MPa en dit in de eerste rubberlaag. Het is evident dat bij een harde impact grotere spanningen zullen ontstaan.

3.6 Besluit

De numerieke berekeningen worden uitgevoerd voor twee groepen van modellen. In de eerste groep wordt de impactbelasting ingegeven als een sinusbelasting en in de tweede groep wordt de impactor mee gemodelleerd. Verder wordt er nog een onderscheid gemaakt tussen een harde en een zachte impact. De simulaties in het eindige-elementenpakket ABAQUS maken het mogelijk om rekening te houden met het gedrag van de materialen. Het staal wordt ingegeven als een elastisch of elastisch-plastisch materiaal, het beton als een elastisch materiaal en het rubber als een hyperelastisch materiaal volgens de rek-energie potentiaal van Arruda-Boyce. Op basis van de verplaatsingen en de spanningen worden de verschillende modellen met elkaar vergeleken.

Na het vergelijken van de verplaatsingen van het aambeeld en funderingsblok tussen de modellen met de sinusbelasting en de modellen met de impactor blijkt dat deze in dezelfde grootte-orde liggen. De modellen met de sinusbelasting overschatten lichtjes de harde impact (5 mm voor het aambeeld, 4 mm voor het funderingsblok) en onderschatten lichtjes de zachte impact (3,5 mm voor het aambeeld, 1 mm voor het funderingsblok). Hieruit kan besloten worden dat een modellering met de sinusbelasting gerechtvaardigd is. Daarnaast moet nog gekeken worden naar de invloed van het materiaalgedrag, meer bepaald het verschil tussen staal als een elastisch materiaal en staal als een elastisch-plastisch materiaal. Bij een zachte impact treden er geen plastische vervormingen op in het aambeeld en is er bijgevolg geen verschil tussen de modellen met staal als elastisch en staal als elastisch-plastisch materiaal. Bij een harde impact ontstaan er plastische vervormingen in het aambeeld wanneer het staal als een elastisch-plastisch materiaal ingegeven wordt. Deze plastische vervormingen treden op in de impactzone, en daar overschrijden de spanningen dan ook de vloeigrens. Naarmate men zich verder verwijdert van deze impactzone dalen de spanningen snel en treden er geen plastisch vervormingen meer op. Het optreden van de plastische vervormingen in de impactzone heeft tot gevolg dat er veel energie gaat naar deze plastische vervormingen waardoor er minder energie overblijft om het aambeeld in zijn geheel te verplaatsen. Dit zorgt voor het verschil in verplaatsingen van het aambeeld en funderingsblok tussen het model waarbij staal als een elastisch materiaal en staal als een elastisch-plastisch materiaal wordt ingegeven. Voor het beton en de rubberlagen vormen de spanningen geen probleem omdat de rubberlaag tussen het aambeeld en funderingsblok ervoor zorgt dat de spanningen geïsoleerd blijven in het aambeeld (staal).

De algemene conclusie is dat de modellen met de sinusbelasting een goede benadering zijn van de impact, toch zijn de modellen met de impactor altijd juister omdat ze de impact zoals in de werkelijk nabootsen, namelijk een impactor (zit ook in het model) die aanslaat op het aambeeld, terwijl bij de sinusbelasting een geconcentreerde kracht ingegeven wordt die volgt uit de analytische berekeningen. Men weerhoudt voor een zachte impact model 7: staal elastisch, beton elastisch en rubber hyperelastisch. Dit geeft volgende maximale verplaatsingen:

- Aambeeld: 28,31 mm
- Funderingsblok: 17,35 mm

Voor een harde impact moet rekening gehouden worden met de plastische vervormingen in de impactzone en hiervoor neemt men model 6: staal elastisch-plastisch, beton elastisch en rubberhyperelastisch met als maximale verplaatsingen:

- Aambeeld: 15,09 mm
- Funderingsblok: 9,38 mm

Hoofdstuk 4

Vergelijking analytische en numerieke berekeningen

4.1 Inleiding

In dit hoofdstuk worden de analytische berekeningen vergeleken met de numerieke berekeningen. Uit de analytische berekeningen volgen geen spanningen, daardoor kan de vergelijking enkel gebeuren op basis van de verplaatsingen. Er werd ook getracht een vergelijking te maken tussen de snelheden net na de impact, maar het was niet mogelijk om uit de numerieke berekeningen de snelheid net na de impact te bepalen, omdat het niet duidelijk waarneembaar is wanneer de impact afgelopen is. Er wordt van uitgegaan dat de numerieke berekeningen de meest betrouwbare resultaten opleveren, omdat ze het meest overeen stemmen met de realiteit. Het verifiëren dat de resultaten van de numerieke berekeningen overeen komen met de realiteit zal de toekomst moeten uitwijzen wanneer het crash platform daadwerkelijk gebouwd wordt.

4.2 Vergelijking

4.2.1 Materiaaleigenschappen

Het grootste verschil tussen de analytische en numerieke berekeningen vindt men terug bij het definiëren van het materiaalgedrag. Bij de analytische berekeningen worden het aambeeld en het funderingsblok gemodelleerd als twee stijve massa's, bij de numerieke berekeningen daarentegen krijgen het aambeeld en het funderingsblok specifieke materiaaleigenschappen toegewezen. Het aambeeld krijgt de materiaaleigenschappen van staal toegewezen en het funderingsblok de materiaaleigenschappen van beton, hierdoor zijn het aambeeld en het funderingsblok niet langer meer onvervormbaar. Uit de verplaatsingen van het aambeeld en het funderingsblok volgens de numerieke berekeningen blijkt dat beide zich als een stijf geheel verplaatsen, dus de modellering in de analytische methode zou dezelfde resultaten moeten opleveren. Echter het materiaalgedrag van de elastische tussenlagen wordt ook anders gemodelleerd. De rubberlaag en de luchtveren worden als een veer-demper systeem gemodelleerd in de analytische berekeningen, dergelijke veer-demper systemen worden gekenmerkt door een veerconstante k en een dempingsconstante c. In werkelijkheid heeft rubber een hyperelastisch materiaalgedrag, met dit gedrag wordt wel rekening gehouden in de numerieke berekeningen. Dus het verschil in modelleren van het rubber moet aan de basis liggen van de eventuele verschillen tussen de verplaatsingen van beide methoden. Om dit te controleren worden de verplaatsingen van de *methode impactbelasting* (combinatie 4) uit de analytische berekeningen vergeleken met de verplaatsingen van model 1 (harde impact) en model 3 (zachte impact) van de numerieke berekeningen. Er wordt gekozen voor deze modellen omdat ze berekend worden met de sinusbelasting die volgt uit de analytische berekeningen. Tevens wordt in beide modellen het staal als lineair elastisch gemodelleerd. Deze verplaatsingen worden samengevat in Tabel 4.1.

Vergelijkingstabel piekverplaatsingen		
	Aambeeld [mm]	Funderingsblok [mm]
Harde impact		
Analytische berekeningen combinatie 4	30,0	20,0
Numerieke berekeningen model 1	26,7	16,7
Numerieke berekeningen model 5	21,7	12,8
Zachte impact		
Analytische berekeningen combinatie 4	28,7	19,2
Numerieke berekeningen model 3	24,8	16,6
Numerieke berekeningen model 7	28,3	17,3

Tabel 4.1: Vergelijking verplaatsingen analytische en numerieke berekeningen

Er blijkt dus wel degelijk een verschil te bestaan tussen de verplaatsingen van beide berekeningswijzen, de verplaatsingen van de analytische berekeningen zijn zowel bij een harde als een zachte impact groter dan deze van de numerieke berekening. Voor een harde impact is het verschil 3,3 mm voor zowel het aambeeld als het funderingsblok en voor een zachte im-

pact is het verschil 4,1 mm voor het aambeeld en 2,6 mm voor het funderingsblok. Deze verschillen zijn klein, dit is te wijten aan de geldende elasticiteitsmodulus van het rubber bij de optredende spanningen. Bij de analytische berekeningen heeft het rubber een elasticiteitsmodulus E=2.000.000 Pa en bij de numerieke berekeningen hoort bij de optredende spanningen ($\leq$500.000 Pa) een elasticiteitsmodulus E=2.204.301 Pa. Het rubber reageert dus iets stijver bij de numerieke berekeningen, wat de kleinere verplaatsingen verklaart. Daarnaast is rubber als onsamendrukbaar gemodelleerd bij de numerieke berekeningen, terwijl bij de analytische berekeningen hiermee geen rekening wordt gehouden, dit heeft hoogstwaarschijnlijk ook een invloed op de verplaatsingen. Bij de analytische berekeningen wordt eigenlijk niet gewerkt met de elasticiteitsmodulus, maar wel met de veerconstante k. Er bestaat echter wel een verband tussen beide die beschreven wordt door vgl.(2.41), namelijk: $k = \frac{E \cdot A}{d_p}$
Doordat de verplaatsingen van beide methoden zo dicht bij elkaar liggen, mag besloten worden dat de weliswaar eenvoudige betrekking in vgl.(2.41) het verband tussen de veerconstante en de elasticiteitsmodulus goed beschrijft. Er dient opgemerkt te worden dat de overeenkomsten niet meer zou gelden indien de spanningen in het rubber hoger zouden oplopen dan 500.000 Pa, want dan moet een andere elasticiteitsmodulus aan het rubber toegewezen worden. Bovendien is dit ook enkel geldig voor het gebruikte rubber (8%sulfur rubber).

4.2.2 Impactbelasting

Bovenstaande vergelijking wordt gemaakt met dezelfde impactbelasting die volgt uit de analytische berekeningen. Nu kan vergeleken worden in hoe verre de berekende impactbelasting overeen komt met de werkelijk optredende impact aan de hand van de verplaatsingen. Deze vergelijking wordt binnen de numerieke berekeningen reeds gemaakt in Hoofdstuk 3 paragraaf 3.5.1. Daar wordt model 1 vergeleken met model 5 voor de harde impact en model 3 met model 7 voor de zachte impact, deze piekwaarden worden ook opgenomen in Tabel 4.1. Er blijkt dat de sinusbelasting de harde impact overschat met ongeveer 5 mm voor het aambeeld en ongeveer 4 mm voor het funderingsblok en dat de sinusbelasting de zachte impact onderschat met ongeveer 3,5 mm voor het aambeeld en ongeveer 1 mm voor het funderingsblok.

De verschillen tussen de verplaatsingen van de analytische berekeningen (combinatie 4 in Tabel 4.1) en de numerieke berekeningen waar de impactor mee gemodelleerd wordt (model 5 en 7 in Tabel 4.1) zijn een combinatie van deze verschillen ten gevolge van de impactbelasting en de verschillen ten gevolge van de materiaaleigenschappen. Dit valt zeer duidelijk op voor de harde impact, waar het verschil tussen combinatie 4 en model 5 oploopt tot 8,3 mm. Dit valt in veel minder mate op bij de zachte impact, maar dit louter toeval omdat beide soorten verschillen elkaar compenseren. Ondanks deze verschillen hebben de verplaatsingen van de analytische berekeningen toch dezelfde grootte-orde als de verplaatsingen die volgen uit de numerieke berekeningen.

4.2.3 Plastische vervormingen

Tot nu toe werd steeds de vergelijking gemaakt met staal die volmaakt lineair elastisch gemodelleerd wordt, uiteraard is dit minder realistisch. Staal beschikt over een vloeigrens en bij het overschrijden van deze grens zullen plastische vervormingen optreden. In Hoofdstuk 3 paragraaf 3.5.1 wordt reeds de invloed van deze materiaaleigenschap geanalyseerd. Daaruit volgt dat deze materiaaleigenschap geen invloed heeft op de verplaatsingen die optreden bij een zachte impact. Dit komt doordat de vloeigrens niet overschreden wordt, daardoor treden er geen plastische vervormingen op. Dit betekent concreet dat de verplaatsingen berekent met de analytische methode nog steeds in dezelfde grootte-orde liggen als de verplaatsingen behorend bij de numerieke berekeningen. Echter bij de harde impact blijkt er wel een groot verschil op te treden wanneer rekening wordt gehouden met het elastisch-plastisch materiaalgedrag van staal, dit bleek uit model 6 waar de maximale verplaatsingen 15,1 mm voor het aambeeld en 9,4 mm voor het funderingsblok bedragen. Als we dit vergelijken met model 5 dan bedraagt het verschil 6,6 mm voor het aambeeld en 3,4 mm voor het funderingsblok. Dit komt doordat er bij een harde impact lokaal, meer bepaald in de impactzone, zeer hoge spanningen optreden met plastische vervormingen als gevolg. Door deze plastische vervormingen gaat zeer veel energie verloren waardoor het aambeeld zich minder gaat verplaatsen. Indien nu de vergelijking gemaakt wordt met de analytische berekeningen (combinatie 4 harde impact) dan liggen de verplaatsingen niet meer in dezelfde grootte-orde, dit komt doordat bij de analytische berekeningen geen sprake is van plastische vervormingen.

4.2.4 De demping

In de grafieken van de verplaatsingen van aambeeld en funderingsblok uit de numerieke berekeningen, meer bepaald Figuur 3.15 en Figuur 3.16, blijkt dat de amplitude van de verplaatsingen niet afneemt in de tijd. Dit betekent dat er bij de numerieke berekeningen geen rekening wordt gehouden met de demping. Bij de analytische berekeningen wordt wel rekening gehouden met de demping door de dempingsconstante c, echter deze dempingsconstante wordt vrij gekozen. Het is dus onmogelijk om de demping te verifiëren met de numerieke berekeningen, hierdoor kunnen er geen besluiten getrokken worden wat de demping betreft.

4.2.5 De trilling

Zowel in de analytische als in de numerieke berekeningen heeft de trilling van het aambeeld en het funderingsblok eenzelfde periode, namelijk ongeveer 0,2 s. Wat de vorm van de trilling betreft zijn er duidelijke verschillen, dit kan men duidelijk zien als men Figuur 2.34 en Figuur 3.15 met elkaar vergelijkt, ze tonen beiden de verplaatsing van het aambeeld voor respectievelijk de analytische en de numerieke berekeningen.

4.3 Besluit

Na al deze beschouwingen kan men besluiten dat de numerieke berekeningen, meer bepaald model 6 waarbij men de impactor mee modelleert en het staal elastisch-plastische materiaaleigenschappen geeft, de meest realistische resultaten oplevert en dit zowel voor een zachte als een harde impact. Uiteraard moet men in model 6 de materiaaleigenschappen van de impactor aanpassen wil men een zachte impact simuleren. In feite voldoet model 7 ook om een zachte impact te modelleren, maar in tegenstelling tot model 6 kan men met model 7 geen harde impact simuleren die realistische resultaten oplevert. Men mag echter de analytische berekeningen niet volledig afschrijven, want gezien de vereenvoudigingen die doorgevoerd worden hebben de resultaten dezelfde grootte-orde als de resultaten van de numerieke berekeningen. Echter uit de analytische berekeningen volgen geen spanningen. Met dit in het achterhoofd kan men besluiten dat de analytische berekeningen eerder geschikt zijn voor het maken van een voorontwerp, meer bepaald voor het bepalen van de grootte-ordes van de onderdelen van het crash platform. Met de analytische berekeningen gaan veel kleinere rekentijden gepaard dan met de numerieke berekeningen, vandaar ook dat de analytische berekeningen het perfecte hulpmiddel zijn om een voorontwerp te maken. Eens men tot een voorontwerp gekomen is kan men vervolgens met de numerieke berekeningen het ontwerp optimaliseren en ook de sterkte van de onderdelen controleren.

Hoofdstuk 5

Besluit

In dit afstudeerwerk wordt een crash platform ontwikkeld die in staat is om de impact van een impactor met een maximale massa van 500 kg en een maximale valhoogte van 25 m veilig over te dragen naar de onderliggende fundering. Dit crash platform moet in een bestaande torenconstructie worden ingepast, dit beperkt de oppervlakte van het crash platform tot een vierkant van 2 m bij 2 m.

Het crash platform bestaat uit verschillende onderdelen, men vindt van boven naar onder:

- Het aambeeld, hierop slaat de impactor in.
- Een eerste elastische tussenlaag, deze moet de impactbelasting isoleren van de onderliggende onderdelen en de ontstane trilling van het aambeeld dempen.
- Het funderingsblok, dit onderdeel moet de verplaatsingen beperken door zijn gewicht.
- Een tweede elastische tussenlaag, deze laag moet eveneens de trilling dempen en isoleren van de onderliggende kuip en fundering.
- De kuip, deze biedt ondersteuning aan de bovenliggende onderdelen en vormt de verbinding met de fundering.

Men voert het aambeeld uit in staal en het funderingsblok in beton. Als eerste elastische tussenlaag wordt gekozen voor rubber, omdat dit zeer dempende eigenschappen heeft en eveneens in staat is om de impactbelasting gelijkmatig over te dragen naar het funderingsblok. Als tweede elastische tussenlaag wordt gekozen voor luchtveren omdat deze zeer goede isolerende eigenschappen hebben en eveneens zeer flexibel zijn, want door de luchtdruk in deze luchtveren aan te passen verkrijgt men een andere veerconstante.

Om de verschillende onderdelen te dimensioneren wordt gebruik gemaakt van verschillende berekeningsmethoden. Er worden analytische en numerieke berekeningen uitgevoerd. Men kan algemeen besluiten dat de analytische berekeningen eerder geschikt zijn om een voorontwerp te maken en de numerieke berekeningen het best geschikt zijn om het voorontwerp te optimaliseren.

Om de analytische berekeningen uit te voeren wordt de opbouw van het crash platform omgevormd tot een model met twee vrijheidsgraden en waarbij het aambeeld en het funderingsblok gemodelleerd worden als twee stijve massa's. De elastische tussenlagen worden gemodelleerd als veer-demper systemen, gekenmerkt door een veerconstante k en een dempingsconstante c. Uit deze analytische berekeningen volgt een voorontwerp met volgende dimensies:

- Het aambeeld heeft een dikte van 20 cm, dit resulteert in een totale massa van 6.280 kg.
- Het funderingsblok krijgt een hoogte van 2 m, wat een massa van 20.000 kg tot gevolg heeft.
- Aan de twee elastische tussenlagen worden een veerconstante k=50.000.000 N/m en een dempingsconstante c=250.000 N.m/s toegewezen.

Uit de analytische berekeningen volgen ook de verplaatsingen van het aambeeld en het funderingsblok, maar deze zijn minder correct dan de verplaatsingen die volgen uit de numerieke berekeningen, vandaar dat ze niet in dit besluit worden opgenomen.

Zowel rubber als luchtveren worden niet gekarakteriseerd door een veerconstante en een dempingsconstante. Er bestaat echter een éénvoudig verband tussen de veerconstante en de elasticiteitsmodulus van rubber. Uit dit verband volgt dat de rubberlaag tussen het aambeeld en het funderingsblok een elasticiteitsmodulus E=2.000.000 Pa en een dikte van 16 cm moet hebben. Er bestaat eveneens een verband tussen de veerconstante en de karakteristieken van de luchtveren. De karakteristieken van de luchtveren volgen uit de catalogus van Firestone, er wordt dan ook uit deze catalogus een type luchtveer weerhouden, namelijk *single convolution springs type 19*.

Dit voorontwerp wordt nu aan numerieke berekeningen onderworpen. Het grote voordeel van numerieke berekeningen is dat ze rekening houden met de materiaaleigenschappen van de verschillende onderdelen. Dit betekent concreet dat het aambeeld en het funderingsblok niet meer gemodelleerd moeten worden als stijve massa's, maar dat ze vervormingen kunnen ondergaan, al dan niet plastisch. Ook het rubber wordt beter gemodelleerd, het krijgt hyperelastische materiaaleigenschappen en wordt als onsamendrukbaar ingegeven. Tevens volgen uit de numerieke berekeningen naast de verplaatsingen ook de optredende spanningen in de verschillende onderdelen. Er dient een onderscheid gemaakt te worden tussen een zogezegd harde en zachte impact. Met een harde impact wordt het accidentele geval bedoelt, waarbij de impactor rechtstreeks op het aambeeld inslaat. Bij een zachte impact slaat de impactor eerst op een proefstuk in waardoor de impact al grotendeels gedempt wordt. In het model die de beste resultaten oplevert worden de onderdelen als volgt gemodelleerd:

- Het staal van het aambeeld krijgt elastisch-plastische materiaaleigenschappen toegewezen.
- Het beton van het funderingsblok wordt elastisch gemodelleerd.
- De elastische tussenlagen worden gemodelleerd als hyperelastisch 8% sulfur rubber met behulp van de Arruda-Boyce rek-energie potentiaal.
- Het staal van de impactor wordt ook elastisch-plastisch gemodelleerd. Maar het krijgt afhankelijk van het type impact, hard of zacht respectievelijk dezelfde of een 1.000 maal kleinere elasticiteitsmodulus dan die van het staal van het aambeeld toegewezen.

Uit de berekeningen met dit model volgt dat de dimensies van het voorontwerp niet aangepast moeten worden. Bij de harde impact worden volgende resultaten opgetekend:

- Het aambeeld trilt met een maximale amplitude van 15,1 mm ten gevolge van de impact.
- Het funderingsblok trilt met een maximale amplitude van 9,4 mm ten gevolge van de impact.
- De periode van de trilling van zowel het aambeeld als het funderingsblok bedraagt 0,2s.
- In het aambeeld komen er in de impactzone spanningen voor die de vloeispanning van het staal overschrijden, hierdoor treden er lokaal plastische vervormingen op. Deze plastische vervormingen zijn onvermijdelijk bij een harde impact. Echter deze lokale plastische vervormingen betekenen geen gevaar voor de algemene stabiliteit van het crash platform.
- In het beton komen geen ontoelaatbare druk of trekspanningen voor.

Bij de zachte impact verkrijgt men volgende resultaten:

- Het aambeeld trilt met een maximale amplitude van 28,3 mm ten gevolge van de impact.
- Het funderingsblok trilt met een maximale amplitude van 17,3 mm ten gevolge van de impact.

- De periode van de trilling van zowel het aambeeld als het funderingsblok bedraagt 0,2s.
- De spanningen in het aambeeld blijven zelf in de impactzone onder de vloeispanning van het staal. Dit betekent dat er geen plastische vervormingen optreden.
- In het beton komen geen ontoelaatbare druk of trekspanningen voor.

Bijlage A

MATLAB programma's

Omdat het een onbegonnen werk is om de programma's van de verschillende methoden uitgewerkt in Hoofdstuk 2 op te nemen in de tekst, worden ze in deze bijlage gebundeld. Ze zijn geschreven in de programmeertaal van het programma MATLAB. De tekst die vooraf gegaan wordt door het procentteken % is geen commando maar geeft een woordje uitleg over de desbetreffende stap in het programma. In deze bijlage staat achtereenvolgens:

- Een artikel over het oplossen van differentiaalvergelijkingen in MATLAB.
- De differentiaalvergelijkingen die gebruikt worden in de verschillende programma's.
- Het programma voor het toepassen van de *methode behoud van impuls.*
- Het programma voor het toepassen van de *methode impactbelasting*
- Het programma voor het toepassen van de *methode behoud van impuls met e.*

Solving Differential Equations

Matlab has two functions, ode23 and ode45, which are capable of numerically solving differential equations. Both of them use a similar numerical formula, Runge-Kutta, but to a different order of approximation.

The syntax for actually solving a differential equation with these functions is:

```
[T,Y] = ode45('yprime',t0,tF,y0);
```

'yprime' is the name of a function that you write that describes your system of differential equations. t0 and tf are the initial and final times that you want a solution for, and y0 is a vector of the initial values of the variables in your system of equations. You get back a vector of times, T, and a matrix Y that has the values of each variable in your system of equations over the times in the time vector. Each column of Y is a different variable.

The hardest part of this is actually defining your differential equation so that matlab understands it. Matlab has a very specific way to define a differential equation, as a function that takes one vector of variables in the differential equation, plus a time vector, as an argument and returns the derivative of that vector. The only way that matlab keeps track of which variable is which inside the vector is the order you choose to use the variables in. You define your differential equations based on that ordering of variables in the vector, you define your initial conditions in the same order, and the columns of your answer are also in that order.

If you follow a careful system to write your differential equation function each time you need to solve a differential equation, it's not too difficult. I'll do an example in this system to explain how it works. In my example, x and y are functions of t.

The system of differential equations we're trying to solve is

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \dot{y} - 2\dot{x} &= 3 \\ \dot{y} &= 3x + 5 \end{aligned}$$

The first thing to notice is that this is not a first order differential equation, because it has an $\ddot{x}$ in it. To create a function that returns a second derivative, one of the variables you give it has to be the first derivative. So the variables the function needs to start with are x, $\dot{x}$, and y. The function needs to tell matlab how to get from those variables to $\dot{x}$, $\ddot{x}$, and $\dot{y}$.

The first step is to write the first line of the function. Since x and y are functions of t, and we eventually want the differential equation to give us x and y, we'll define the function with

```
function dxy = diffxy(t, xy)
```

This function is called diffxy. That means it should be in a file called

```
diffxy.m
```

. It takes a vector xy (which has all three of the variables we said we had to give matlab to define our differential equation in it) and a time vector, and gives us the derivative of the three things in the the xy vector.

The next step is to assign some variables from the xy vector that this function is given. This is when we decide what order the three things in the xy vector will be in. We could just keep calling them xy(1), xy (2), and xy(3), but then we might forget which one of them was supposed to represent x, which one was supposed to represent y, etc. So the first thing we do is rename some variables:

```
x = xy(1);
xdot = xy(2);
y = xy(3);
```

Now we can use x, xdot, and y to define the three things that this function has to return---xdot, xdoubledot, and ydot. This is where we actually refer to the differential equation and implement it.

The first definition is trivial. We need to express xdot (the derivative of x) in terms of the three variables we're given. xdot is already one of the three variables we're given, so we can use it to start with:

```
xdot = xdot;
```

Then xdoubledot comes from the first equation:

```
xdoubledot = 3 - ydot + 2*xdot;
```

Whoops, we don't _have_ a ydot yet. It's not one of the three variables we're given in xy. But the second equation tells us what ydot is equal to in terms of things we _are_ given in xy. So what we really want to say is

```
ydot = 3*x + 2*y + 5;
xdoubledot = 3 - ydot + 2*xdot;
```

The last thing we want to define is ydot, which is the derivative of y. We just defined it above in order to get xdoubledot, so we're done.

So dxy, the thing we return, has to contain xdot, xdoubledot, and ydot in order. The final thing we have to do is combine those values into the vector dxy:

```
dxy = [xdot; xdoubledot; ydot];
```

Then we have a finished function that takes t and xy, and returns dxy, which is the derivative of all the elements in xy. You can follow this approach for any number of differential equations.

The final program, diffxy.m, looks like

```
function dxy = diffxy(t, xy)
%
%split xy into variables in our equations
%
x = xy(1);
xdot = xy(2);
y = xy(3);
%
% define the derivatives of these variables from equations
%
xdot = xdot;
ydot = 3*x + 2*y + 5;
```

```
xdoubledot = 3 - ydot + 2*xdot;
%
%return the derivatives in dxy in the right order
%
dxy = [xdot; xdoubledot; ydot]
```

To get a solution, we can type

```
[T, XY] ode45('diffxy',0,10,[0 1 0])
```

which uses times from 0 to 10 and assumes that the initial value of x is 0, xdot is 1, and ydot is 0, and gives us a time vector and a three column vector that contains values of x, xdot, and y over that time vector.

Differentiaalvergelijkingen

Differentiaalvergelijking van de impactor

```
function dxy = diffSystemAbove(t, xy)

% definieer alle variabelen uit de differentiaalvergelijkingen
zi = xy(1);
zidot = xy(2);
Ft=xy(3);
mi=xy(4);
g=xy(5);

% definieer het verband tussen de variabelen en hun afgeleiden aan de
hand van de differntiaalvergelijkingen
zidot=zidot;
zidoubledot = -Ft/mi+g;

% het programma geeft als oplossing de agfeleiden van de variabelen
dxy = [zidot; zidoubledot; 0; 0; 0]
```

Differentiaalvergelijkingen van het systeem tijdens impact

```
function dxy = diffSystemBelow(t, xy)

% definieer alle variabelen uit de differentiaalvergelijkingen
z1 = xy(1);
z2 = xy(2);
z1dot = xy(3);
z2dot = xy(4);
Ft=xy(5);
m1=xy(6);
c1=xy(7);
k1=xy(8);
m2=xy(9);
c2=xy(10);
k2=xy(11);

% definieer het verband tussen de variabelen en hun afgeleiden aan de
hand van de differntiaalvergelijkingen
z1dot = z1dot;
z2dot = z2dot;
z1doubledot = (Ft-c1*(z1dot-z2dot)-k1*(z1-z2))/m1;
z2doubledot = (-c2*z2dot+c1*(z1dot-z2dot)-k2*z2+k1*(z1-z2))/m2;

% het programma geeft als oplossing de agfeleiden van de variabelen
dxy = [z1dot; z2dot; z1doubledot; z2doubledot; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0]
```

Differentiaalvergelijkingen van het systeem in vrije trilling

```
function dxy = diffSystemBelowlos(t, xy)

% definieer alle variabelen uit de differentiaalvergelijkingen
z1 = xy(1);
z2 = xy(2);
z1dot = xy(3);
z2dot = xy(4);
Ft=xy(5);
m1=xy(6);
c1=xy(7);
k1=xy(8);
m2=xy(9);
c2=xy(10);
k2=xy(11);

% definieer het verband tussen de variabelen en hun afgeleiden aan de
hand van de differntiaalvergelijkingen
z1dot = z1dot;
z2dot = z2dot;
z1doubledot = (-c1*(z1dot-z2dot)-k1*(z1-z2))/m1;
z2doubledot = (-c2*z2dot+c1*(z1dot-z2dot)-k2*z2+k1*(z1-z2))/m2;

% het programma geeft als oplossing de agfeleiden van de variabelen
dxy = [z1dot; z2dot; z1doubledot; z2doubledot; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0]
```

Programma methode behoud van impuls

```
%openen van een resultatenfile
fid = fopen('momentum_14.txt','wt');

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%    invoergegevens     %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% algemene gegevens
g=9.81
% valhoogte
h=25
% totale simulatietijd
T=4
% tijdstap
j=0.001
% impactor
mi=500
% aambeeld
m1=6280
k1=50000000
c1=250000
% funderingsblok
m2=20000
k2=50000000
c2=250000

% wegschrijven van de invoergegevens
fprintf(fid,'mi  m1  m2  k1  k2  c1  c2\n');
geg=[mi; m1; m2; k1; k2; c1; c2];
fprintf(fid,'%6.0f %8.0f %8.0f %12.0f %12.0f %12.0f %12.0f\n',geg);
fprintf(fid,'\n');
% hoofding van de kolommen
fprintf(fid,'t  z1  z2  v1  v2  a1  a2\n');

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%     startvoorwaarden      %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

t=0
%impactor
zi0=0
vi0=sqrt(2*g*h)
ai0=g
%aambeeld
z10=mi*g/k1
v10=vi0*mi/(mi+m1)
a10=0
%funderingsblok
z20=0
v20=0
a20=0
```

```
% wegschrijven van de startvoorwaarden
res=[t; z10; z20; v10; v20; a10; a20];
fprintf(fid,'%12.6f %14.10f %14.10f %14.10f %14.10f %16.10f
%16.10f\n',res);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%     integratielus       %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% de tijd verhogen met een tijdstap
t=j;
% lus wordt herhaald totdat de totale simulatietijd bereikt wordt
while t<T
    % oplossen van de differentiaalvergelijking
    [T2,XY2]=ode45('diffSystemBelow',[0 j],[z10 z20 v10 v20 0 m1 c1 k1
m2 c2 k2])
    z1=XY2(end,1)
    z2=XY2(end,2)
    v1=XY2(end,3)
    v2=XY2(end,4)
    % berekening versnellingen
    a1=(-c1*(v1-v2)-k1*(z1-z2))/m1;
    a2= (-c2*v2+c1*(v1-v2)-k2*z2+k1*(z1-z2))/m2;
    % wegschrijven van de resultaten
    res=[t; z1; z2; v1; v2; a1; a2];
    fprintf(fid,'%12.6f %14.10f %14.10f %14.10f %14.10f %16.10f
%16.10f\n',res);
    % de resultaten worden de startvoorwaarden van de volgende lus
    z10=z1
    v10=v1
    z20=z2
    v20=v2
    % de tijd wordt met een tijdstap verhoogd
    t=t+j
end

% sluiten van de resultatenfile
fclose(fid);
```

Programma methode impactbelasting

```
%openen van een resultatenfile
fid = fopen('impactbelasting.txt','wt');

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%    invoergegevens     %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% algemene gegevens
g=9.81
pr=0.3 %poisson ratio
% valhoogte
h=25
% totale simulatietijd
T=5
% tijdstappen
j=0.00001   % tijdstap voor het integreren tijdens de impact
l=0.01      % tijdstap voor het integreren tijdens de vrije trilling
% impactor
mi=500
r=0.1778     % straal van de impactor
E2=210.E6
% aambeeld
m1=6280
k1=50000000
c1=250000
E1=210.E9
% funderingsblok
m2=20000
k2=50000000
c2=250000

% wegschrijven van de invoergegevens
fprintf(fid,'mi  m1  m2  k1  k2  c1  c2\n');
geg=[mi; m1; m2; k1; k2; c1; c2];
fprintf(fid,'%6.0f %8.0f %8.0f %12.0f %12.0f %12.0f %12.0f\n',geg);
fprintf(fid,'\n');
% hoofding van de kolommen
fprintf(fid,'t  Ft  w0  zi  z1  z2  vi  v1  v2  ai  a1  a2\n');

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%     startvoorwaarden      %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

t=0
w0=0
Ft=0
% impactor
zi0=0
vi0=sqrt(2*g*h)
ai0=g
```

```
% aambeeld
z10=0
v10=0
a10=0
% funderingsblok
z20=0
v20=0
a20=0
% wegschrijven van de startvoorwaarden
res=[t; Ft; w0; zi0; z10; z20; vi0; v10; v20; ai0; a10; a20];
fprintf(fid,'%12.6f %12.0f %14.10f %14.10f %14.10f %14.10f %12.6f
%14.10f %14.10f %16.6f %16.6f %16.10f\n',res);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%     integratielussen       %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% de equivalente elasticiteitsmodulus berekenen
E=2*E1*E2/(E1+E2)
% de startwaarde van de impactbelasting initialiseren
F0=1
% de tijd verhogen met een tijdstap j
t=j;
Ft=F0;
% lus wordt herhaald totdat de totale simulatietijd bereikt wordt
while t<T
    % oplossen van de differentiaalvergelijkingen
    [T1,XY]=ode45('diffSystemAbove',[0 j],[zi0 vi0 Ft mi g]);
    [T2,XY2]=ode45('diffSystemBelow',[0 j],[z10 z20 v10 v20 Ft m1 c1 k1
m2 c2 k2])
    z1=XY2(end,1);
    z2=XY2(end,2);
    v1=XY2(end,3);
    v2=XY2(end,4);
    zi=XY(end,1);
    vi=XY(end,2);
    % berekening versnellingen
    a1=(Ft-c1*(v1-v2)-k1*(z1-z2))/m1;
    a2= (-c2*v2+c1*(v1-v2)-k2*z2+k1*(z1-z2))/m2;
    ai=-Ft/mi+g;
    % toepassen formule van Hertz
    w0=((2.25*(1-pr^2)^2*Ft^2)/(E^2*r))^(1/3)
    % lus voor het zoeken van de impactbelasting
    while abs(z1+w0-zi)>1.E-6
        if (zi>z1+w0)
            % Ft vergroten
            i=Ft
            Ft=Ft*2
             if (Ft>2050)
                 % oplossen van de differentiaalvergelijkingen
                 [T1,XY]=ode45('diffSystemAbove',[0 j],[zi0 vi0 Ft mi
g]);
                 [T2,XY2]=ode45('diffSystemBelow',[0 j],[z10 z20 v10
v20 Ft m1 c1 k1 m2 c2 k2])
                 z1=XY2(end,1);
                 z2=XY2(end,2);
```

```
                v1=XY2(end,3);
                v2=XY2(end,4);
                zi=XY(end,1);
                vi=XY(end,2);
                % berekening versnellingen
                a1=(Ft-c1*(v1-v2)-k1*(z1-z2))/m1;
                a2= (-c2*v2+c1*(v1-v2)-k2*z2+k1*(z1-z2))/m2;
                ai=-Ft/mi+g;
                % toepassen formule van Hertz
                w0=((2.25*(1-pr^2)^2*Ft^2)/(E^2*r))^(1/3)
            else
                % in deze lus wordt de vrije trilling berekend
                while z1-zi>0
                    % oplossen van de differentiaalvergelijkingen
                    [T3,XY3]=ode45('diffSystemBelowlos',[0 l],[z10 z20
v10 v20 Ft m1 c1 k1 m2 c2 k2])
                    z1=XY3(end,1)
                    z2=XY3(end,2);
                    v1=XY3(end,3);
                    v2=XY3(end,4);
                    % berekening versnellingen
                    a1=(-c1*(v1-v2)-k1*(z1-z2))/m1;
                    a2=(-c2*v2+c1*(v1-v2)-k2*z2+k1*(z1-z2))/m2;
                    % berekening verplaatsing, snelheid en versnelling
van de impactor
                    zi=zi0+vi0*m+1/2*g*m^2
                    vi0=vi0+g*m
                    ai=g;
                    % de resultaten worden de startvoorwaarden van de
volgende lus
                    zi0=zi
                    z10=XY3(end,1)
                    z20=XY3(end,2)
                    v10=XY3(end,3)
                    v20=XY3(end,4)
                    % wegschrijven van de resultaten
                    res=[t; 0; 0; zi; z1; z2; vi0; v1; v2; ai; a1;
a2];
                    fprintf(fid,'%12.6f %12.0f %14.10f %14.10f %14.10f
%14.10f %12.6f %14.10f %14.10f %16.6f %16.6f %16.10f\n',res);
                    % de tijd verhogen met een tijdstap l
                    t=t+l
                    Ft=F0
                end
                % oplossen van de differentiaalvergelijkingen
                [T1,XY]=ode45('diffSystemAbove',[0 j],[zi0 vi0 Ft mi
g])
                [T2,XY2]=ode45('diffSystemBelow',[0 j],[z10 z20 v10
v20 Ft m1 c1 k1 m2 c2 k2])
                z1=XY2(end,1);
                z2=XY2(end,2);
                v1=XY2(end,3);
                v2=XY2(end,4);
                zi=XY(end,1);
                vi=XY(end,2);
```

```
                 % berekening versnellingen
                 a1=(Ft-c1*(v1-v2)-k1*(z1-z2))/m1;
                 a2= (-c2*v2+c1*(v1-v2)-k2*z2+k1*(z1-z2))/m2;
                 ai=-Ft/mi+g;
                 % toepassen formule van Hertz
                 w0=((2.25*(1-pr^2)^2*Ft^2)/(E^2*r))^(1/3)
             end
        else
            % in deze lus wordt Ft verkleint en indien nodig terug
vergroot
            while abs(z1+w0-zi)>1.E-6
                if (zi<z1+w0)
                    % Ft verkleinen
                    Ftvorig=Ft
                    Ft=Ft-(Ft-i)/2
                    if (Ft>2050)
                        % oplossen van de differentiaalvergelijkingen
                        [T1,XY]=ode45('diffSystemAbove',[0 j],[zi0 vi0
Ft mi g]);
                        [T2,XY2]=ode45('diffSystemBelow',[0 j],[z10 z20
v10 v20 Ft m1 c1 k1 m2 c2 k2])
                        z1=XY2(end,1);
                        z2=XY2(end,2);
                        v1=XY2(end,3);
                        v2=XY2(end,4);
                        zi=XY(end,1);
                        vi=XY(end,2);
                        % berekening versnellingen
                        a1=(Ft-c1*(v1-v2)-k1*(z1-z2))/m1;
                        a2= (-c2*v2+c1*(v1-v2)-k2*z2+k1*(z1-z2))/m2;
                        ai=-Ft/mi+g;
                        % toepassen formule van Hertz
                        w0=((2.25*(1-pr^2)^2*Ft^2)/(E^2*r))^(1/3)
                    else
                        % in deze lus wordt de vrije trilling berekend
                        while z1-zi>0
                            % oplossen van de
differentiaalvergelijkingen
                            [T3,XY3]=ode45('diffSystemBelowlos',[0
l],[z10 z20 v10 v20 Ft m1 c1 k1 m2 c2 k2])
                            z1=XY3(end,1)
                            z2=XY3(end,2);
                            v1=XY3(end,3);
                            v2=XY3(end,4);
                            % berekening versnellingen
                            a1=(-c1*(v1-v2)-k1*(z1-z2))/m1;
                            a2=(-c2*v2+c1*(v1-v2)-k2*z2+k1*(z1-z2))/m2;
                            % berekening verplaatsing, snelheid en
versnelling van de impactor
                            zi=zi0+vi0*m+1/2*g*m^2;
                            vi0=vi0+g*m
                            ai=g;
                            % de resultaten worden de startvoorwaarden
van de volgende lus
                            zi0=zi
                            z10=XY3(end,1)
                            z20=XY3(end,2)
```

```
                            v10=XY3(end,3)
                            v20=XY3(end,4)
                            % wegschrijven van de resultaten
                            res=[t; 0; 0; zi; z1; z2; vi0; v1; v2; ai;
a1; a2];
                            fprintf(fid,'%12.6f %12.0f %14.10f %14.10f
%14.10f %14.10f %12.6f %14.10f %14.10f %16.6f %16.6f %16.10f\n',res);
                            % de tijd verhogen met een tijdstap l
                            t=t+l
                            Ft=F0
                        end
                        % oplossen van de differentiaalvergelijkingen
                        [T1,XY]=ode45('diffSystemAbove',[0 j],[zi0 vi0
Ft mi g])
                        [T2,XY2]=ode45('diffSystemBelow',[0 j],[z10 z20
v10 v20 Ft m1 c1 k1 m2 c2 k2])
                        z1=XY2(end,1);
                        z2=XY2(end,2);
                        v1=XY2(end,3);
                        v2=XY2(end,4);
                        zi=XY(end,1);
                        vi=XY(end,2)
                        % berekening versnellingen
                        a1=(Ft-c1*(v1-v2)-k1*(z1-z2))/m1;
                        a2= (-c2*v2+c1*(v1-v2)-k2*z2+k1*(z1-z2))/m2;
                        ai=-Ft/mi+g;
                        % toepassen formule van Hertz
                        w0=((2.25*(1-pr^2)^2*Ft^2)/(E^2*r))^(1/3)
                    end
                else
                    % Ft terug vergroten
                    i=abs(Ftvorig-Ft)/2;
                    Ftvorig=Ft;
                    Ft=Ft+i
                    if (Ft>2050)
                        % oplossen van de differentiaalvergelijkingen
                        [T1,XY]=ode45('diffSystemAbove',[0 j],[zi0 vi0
Ft mi g]);
                        [T2,XY2]=ode45('diffSystemBelow',[0 j],[z10 z20
v10 v20 Ft m1 c1 k1 m2 c2 k2])
                        z1=XY2(end,1);
                        z2=XY2(end,2);
                        v1=XY2(end,3);
                        v2=XY2(end,4);
                        zi=XY(end,1);
                        vi=XY(end,2);
                        % berekening versnellingen
                        a1=(Ft-c1*(v1-v2)-k1*(z1-z2))/m1;
                        a2= (-c2*v2+c1*(v1-v2)-k2*z2+k1*(z1-z2))/m2;
                        ai=-Ft/mi+g;
                        % toepassen formule van Hertz
                        w0=((2.25*(1-pr^2)^2*Ft^2)/(E^2*r))^(1/3)
                    else
                        % in deze lus wordt de vrije trilling berekend
                        while z1-zi>0
```

```
                            % oplossen van de
                        differentiaalvergelijkingen
                            [T3,XY3]=ode45('diffSystemBelowlos',[0
l],[z10 z20 v10 v20 Ft m1 c1 k1 m2 c2 k2])
                            z1=XY3(end,1)
                            z2=XY3(end,2);
                            v1=XY3(end,3);
                            v2=XY3(end,4);
                            % berekening versnellingen
                            a1=(-c1*(v1-v2)-k1*(z1-z2))/m1;
                            a2=(-c2*v2+c1*(v1-v2)-k2*z2+k1*(z1-z2))/m2;
                            % berekening verplaatsing, snelheid en
versnelling van de impactor
                            zi=zi0+vi0*m+1/2*g*m^2;
                            vi0=vi0+g*m
                            ai=g;
                            % de resultaten worden de startvoorwaarden
van de volgende lus
                            z10=XY3(end,1)
                            z20=XY3(end,2)
                            v10=XY3(end,3)
                            v20=XY3(end,4)
                            zi0=zi
                            % wegschrijven van de resultaten
                            res=[t; 0; 0; zi; z1; z2; vi0; v1; v2; ai;
a1; a2];
                            fprintf(fid,'%12.6f %12.0f %14.10f %14.10f
%14.10f %14.10f %12.6f %14.10f %14.10f %16.6f %16.6f %16.10f\n',res);
                            % de tijd verhogen met een tijdstap l
                            t=t+l
                            Ft=F0
                        end
                        % oplossen van de differentiaalvergelijkingen
                        [T1,XY]=ode45('diffSystemAbove',[0 j],[zi0 vi0
Ft mi g])
                        [T2,XY2]=ode45('diffSystemBelow',[0 j],[z10 z20
v10 v20 Ft m1 c1 k1 m2 c2 k2])
                        z1=XY2(end,1);
                        z2=XY2(end,2);
                        v1=XY2(end,3);
                        v2=XY2(end,4);
                        zi=XY(end,1);
                        vi=XY(end,2);
                        % berekening versnellingen
                        a1=(Ft-c1*(v1-v2)-k1*(z1-z2))/m1;
                        a2= (-c2*v2+c1*(v1-v2)-k2*z2+k1*(z1-z2))/m2;
                        ai=-Ft/mi+g;
                        % toepassen formule van Hertz
                        w0=((2.25*(1-pr^2)^2*Ft^2)/(E^2*r))^(1/3)
                    end
                end
            end
        end
    end
```

```
    % wegschrijven van de resultaten
    res=[t; Ft; w0; zi; z1; z2; vi; v1; v2; ai; a1; a2];
    fprintf(fid,'%12.6f %12.0f %14.10f %14.10f %14.10f %14.10f %12.6f
%14.10f %14.10f %16.6f %16.6f %16.10f\n',res);

    % de resultaten worden de startvoorwaarden van de volgende lus
    zi0=zi
    vi0=XY(end,2)
    z10=z1
    v10=XY2(end,3)
    z20=XY2(end,2)
    v20=XY2(end,4)
    % de tijd verhogen met een tijdstap j
    t=t+j
    Ft=F0
end
% sluiten van de resultatenfile
fclose(fid);
```

Programma methode behoud van impuls met e

```
%openen van een resultatenfile
fid = fopen('momentum_met_e_1.txt','wt');

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%    invoergegevens     %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% algemene gegevens
g=9.81
% valhoogte
h=25
% totale simulatietijd
T=4
% tijdstap
j=0.001
% impactor
mi=500
% aambeeld
m1=6280
k1=50000000
c1=250000
% funderingsblok
m2=20000
k2=50000000
c2=250000
%relatieve materiaal eigenschappen
e=1


% wegschrijven van de invoergegevens
fprintf(fid,'mi  m1  m2  k1  k2  c1  c2\n');
geg=[mi; m1; m2; k1; k2; c1; c2];
fprintf(fid,'%6.0f %8.0f %8.0f %12.0f %12.0f %12.0f %12.0f\n',geg);
fprintf(fid,'\n');
% hoofding van de kolommen
fprintf(fid,'t  z1  z2  v1  v2  a1  a2\n');

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%     startvoorwaarden      %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

t=0
%impactor
zi0=0
vi0=sqrt(2*g*h)
ai0=g
%aambeeld
z10=mi*g/k1
v10=vi0*mi*(1+e)/(mi+m1)
a10=0
%funderingsblok
z20=0
```

```
v20=0
a20=0
% wegschrijven van de startvoorwaarden
res=[t; z10; z20; v10; v20; a10; a20];
fprintf(fid,'%12.6f %14.10f %14.10f %14.10f %14.10f %16.10f
%16.10f\n',res);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%     integratielus       %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% de tijd verhogen met een tijdstap
t=j;
% lus wordt herhaald totdat de totale simulatietijd bereikt wordt
while t<T
    % oplossen van de differentiaalvergelijking
    [T2,XY2]=ode45('diffSystemBelow',[0 j],[z10 z20 v10 v20 0 m1 c1 k1
m2 c2 k2])
    z1=XY2(end,1)
    z2=XY2(end,2)
    v1=XY2(end,3)
    v2=XY2(end,4)
    % berekening versnellingen
    a1=(-c1*(v1-v2)-k1*(z1-z2))/m1;
    a2= (-c2*v2+c1*(v1-v2)-k2*z2+k1*(z1-z2))/m2;
    % wegschrijven van de resultaten
    res=[t; z1; z2; v1; v2; a1; a2];
    fprintf(fid,'%12.6f %14.10f %14.10f %14.10f %14.10f %16.10f
%16.10f\n',res);
    % de resultaten worden de startvoorwaarden van de volgende lus
    z10=z1
    v10=v1
    z20=z2
    v20=v2
    % de tijd wordt met een tijdstap verhoogd
    t=t+j
end

% sluiten van de resultatenfile
fclose(fid);
```

Bijlage B

Formule van Hertz

3 Elastizitätstheorie
Theory of elasticity

3.1 Allgemeines. Introduction

Aufgabe der Elastizitätstheorie ist es, den Spannungs- und Verformungszustand eines Körpers unter Beachtung der gegebenen Randbedingungen zu berechnen, d.h. die Größen σ_x, σ_y, σ_z, τ_{xy}, τ_{xz}, τ_{yz}, ε_x, ε_y, ε_z, γ_{xy}, γ_{xz}, γ_{yz}, u, v, w zu ermitteln. Für diese 15 Unbekannten stehen zunächst die Gln. C1(12) und C1(13) zur Verfügung. Hinzu kommen drei Gleichgewichtsbedingungen (**Bild 1**) mit den Volumenkräften X, Y, Z.

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}+X=0,\\
&\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}+Y=0,\\
&\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+Z=0,
\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

sowie für isotrope Körper die sechs verallgemeinerten Hookeschen Gesetze

$$\left.\begin{aligned}
&\varepsilon_x=[\sigma_x-\nu(\sigma_y+\sigma_z)]/E,\quad \varepsilon_y=[\sigma_y-\nu(\sigma_x+\sigma_z)]/E,\\
&\varepsilon_z=[\sigma_z-\nu(\sigma_x+\sigma_y)]/E,\\
&\gamma_{xy}=\tau_{xy}/G,\quad \gamma_{xz}=\tau_{xz}/G,\quad \gamma_{yz}=\tau_{yz}/G.
\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

Damit stehen 15 Gleichungen für 15 Unbekannte zur Verfügung. Eliminiert man aus ihnen *alle Spannungen*, so erhält man drei partielle Differentialgleichungen für die unbekannten Verschiebungen:

$$\left.\begin{aligned}
&G\left(\Delta u+\frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}\right)+X=0,\\
&G\left(\Delta v+\frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial\varepsilon}{\partial y}\right)+Y=0,\\
&G\left(\Delta w+\frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial\varepsilon}{\partial z}\right)+Z=0
\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

mit $\Delta u=\partial^2u/\partial x^2+\partial^2u/\partial y^2+\partial^2u/\partial z^2$ usw.
und $\varepsilon=\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z=\partial u/\partial x+\partial v/\partial y+\partial w/\partial z$.

Die Navierschen Gln. (3) eignen sich zur Lösung von Problemen, bei denen als Randbedingungen Verschiebungen vorgegeben sind. Eliminiert man aus den zitierten 15 Gleichungen *alle Verschiebungen* und deren Ableitungen, so bleiben sechs Gleichungen für die unbekannten Spannungen:

$$\Delta\sigma_x+\frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\sigma}{\partial x^2}+2\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)=0 \tag{4a}$$

(entsprechend für die y- und z-Richtung) und

$$\Delta\tau_{xy}+\frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\sigma}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial X}{\partial y}+\frac{\partial Y}{\partial x}=0 \tag{4b}$$

(entsprechend für die y- und z-Richtung).

Hierbei ist $\sigma=\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z$. Die Beltramischen Gln. (4) eignen sich zur Lösung von Problemen, bei denen als Randbedingungen Spannungen vorgegeben sind. Bei gemischten Randbedingungen sind beide Gleichungssysteme zu benutzen. Lösungen der Differentialgleichungen (3) und (4) liegen im wesentlichen für rotationssymmetrische und ebene Probleme vor.

3.2 Der rotationssymmetrische Spannungszustand
Axisymmetric stresses

Setzt man Symmetrie zur z-Achse voraus, so treten lediglich die Spannungen $\sigma_r, \sigma_t, \sigma_z, \tau_{rz}=\tau_{zr}=\tau$ auf (**Bild 2**). Die Gleichgewichtsbedingungen in r- und z-Richtung lauten

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial r}(r\sigma_r)+\frac{\partial}{\partial z}(r\tau)-\sigma_t+rR=0,\\
&\frac{\partial}{\partial r}(r\tau)+\frac{\partial}{\partial z}(r\sigma_z)+rZ\quad=0.
\end{aligned}\right\}\tag{5}$$

Die Hookeschen Gesetze haben die Form

$$\left.\begin{aligned}
&\varepsilon_r=\partial u/\partial r=[\sigma_r-\nu(\sigma_t+\sigma_z)]/E,\\
&\varepsilon_t=u/r=[\sigma_t-\nu(\sigma_r+\sigma_z)]/E,\\
&\varepsilon_z=\partial w/\partial z=[\sigma_z-\nu(\sigma_r+\sigma_t)]/E,\\
&\gamma_{rz}=\partial u/\partial z+\partial w/\partial r=\tau/G=2(1+\nu)\,\tau/E.
\end{aligned}\right\}\tag{6}$$

Ihre Auflösung nach den Spannungen liefert

$$\left.\begin{aligned}
&\sigma_r=2G\left(\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon\right),\quad \sigma_t=2G\left(\frac{u}{r}+\frac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon\right),\\
&\sigma_z=2G\left(\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon\right),\quad \tau=G\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial r}\right),
\end{aligned}\right\}\tag{7}$$

wobei

$$\varepsilon=\varepsilon_r+\varepsilon_t+\varepsilon_z=\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{u}{r}+\frac{\partial w}{\partial z}. \tag{8}$$

Wird die Lovesche Verschiebungsfunktion Φ eingeführt, so muß sie der Bipotentialgleichung

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)=\Delta\Delta\Phi=0 \tag{9}$$

genügen. Lösungen der Bipotentialgleichung sind z.B. $\Phi=r^2$, $\ln r$, $r^2\ln r$, z, z^2 und $\sqrt{r^2+z^2}$ sowie Linearkombinationen hiervon [1]. Die Verschiebungen und Spannungen folgen dann aus

Spezielle Literatur S. 213

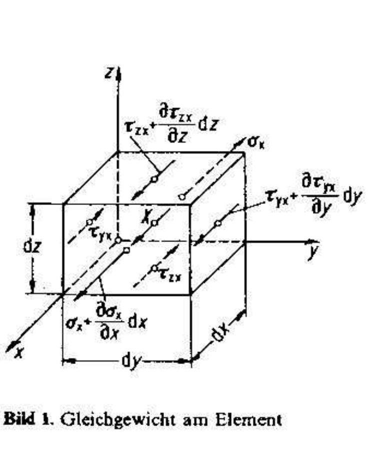


Bild 1. Gleichgewicht am Element

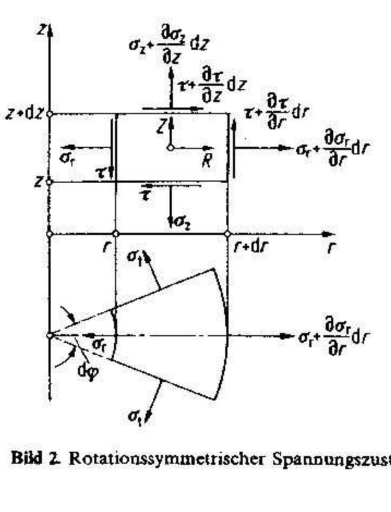


Bild 2. Rotationssymmetrischer Spannungszustand

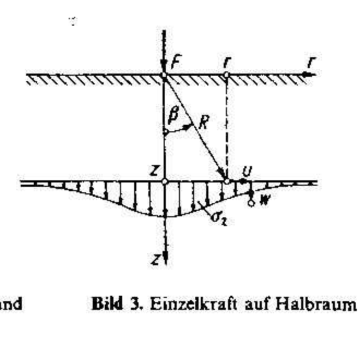


Bild 3. Einzelkraft auf Halbraum

$$\left.\begin{aligned}
u&=-\frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial^2\Phi}{\partial r\,\partial z},\\
w&=\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\Delta\Phi-\frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2},\\
\sigma_r&=\frac{2G\nu}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial z}\left(\Delta\Phi-\frac{1}{\nu}\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}\right),\\
\sigma_z&=\frac{2(2-\nu)G}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial z}\left(\Delta\Phi-\frac{1}{2-\nu}\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right),\\
\sigma_t&=\frac{2G\nu}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial z}\left(\Delta\Phi-\frac{1}{\nu}\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right),\\
\tau&=\frac{2(1-\nu)G}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial r}\left(\Delta\Phi-\frac{1}{1-\nu}\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right).
\end{aligned}\right\}\qquad(10)$$

Beispiel: Einzelkraft auf Halbraum (Formeln von Boussinesq) **Bild** 3. – Die Randbedingungen lauten

$$\sigma_z(z=0, r\neq 0)=0,\quad \tau(z=0, r\neq 0)=0.$$

Mit dem Ansatz $\Phi=C_1R+C_2z\ln(z+R)$, wobei $R=\sqrt{r^2+z^2}$ ist, folgt aus den Gln. (10)

$$\sigma_z=-2G\left[\left(C_1-\frac{2\nu}{1-2\nu}C_2\right)\frac{z}{R^3}+\frac{3}{1-2\nu}(C_1+C_2)\frac{z^3}{R^5}\right]\quad\text{und}$$

$$\tau=-2G\left[\left(C_1-\frac{2\nu}{1-2\nu}C_2\right)\frac{r}{R^3}+\frac{3}{1-2\nu}(C_1+C_2)\frac{rz^2}{R^5}\right].$$

Während die erste Randbedingung automatisch befriedigt ist, folgt aus der zweiten $C_2=\frac{1-2\nu}{2\nu}C_1$ und damit $\sigma_z=-C_1\frac{3G}{\nu(1-2\nu)}\frac{z^3}{R^5}$. Aus $F=-\int\limits_{r=0}^{\infty}\sigma_z 2\pi r\,\mathrm{d}r$ ergibt sich dann $C_1=F\nu(1-2\nu)/(2\pi G)$ und damit aus den Gln. (10)

$$\left.\begin{aligned}
u&=\frac{F}{4\pi G}\left[\frac{rz}{R^3}-(1-2\nu)\frac{r}{R(z+R)}\right],\\
w&=\frac{F}{4\pi G}\left[2(1-\nu)\frac{1}{R}+\frac{z^2}{R^3}\right],\\
\sigma_z&=-\frac{3F}{2\pi}\frac{z^3}{R^5},\quad \sigma_r=\frac{F}{2\pi}\left[(1-2\nu)\frac{1}{R(z+R)}-3\frac{zr^2}{R^5}\right],\\
\sigma_t&=\frac{F}{2\pi}(1-2\nu)\left[\frac{z}{R^3}-\frac{1}{R(z+R)}\right],\quad \tau=-\frac{3F}{2\pi}\frac{rz^2}{R^5}.
\end{aligned}\right\}\qquad(11)$$

Wegen $\sigma_z/\tau=z/r$ lassen sich σ_z und τ zum Spannungsvektor $s_R=\sqrt{\sigma_z^2+\tau^2}=3Fz^2/(2\pi R^4)$ zusammenfassen, der stets in Richtung R zeigt. Für σ_r ergeben sich gemäß $\sigma_r=0$ Nullstellen aus $\sin^2\beta\cos\beta(1+\cos\beta)=(1-2\nu)/3$ im Fall $\nu=0{,}3$ zu $\beta_1=15{,}4°$ und $\beta_2=83°$. Zwischen den durch $2\beta_1=30{,}8°$ und $2\beta_2=166°$ bestimmten Kreiskegeln wird σ_r negativ (Druckspannung), außerhalb ist es positiv (Zugspannung). Aus $\sigma_t=0$ folgt $\cos^2\beta+\cos\beta=1$, d.h. $\beta=52°$. Für $\beta<52°$ wird σ_t positiv (Zugspannung), für $\beta>52°$ negativ (Druckspannung).

3.3 Der ebene Spannungszustand. Plane stresses

Er liegt vor, wenn $\sigma_z=0$, $Z=0$, $\tau_{xz}=\tau_{yz}=0$, d.h., wenn Spannungen nur in der x, y-Ebene auftreten. Die Gleichgewichtsbedingungen lauten für konstante Volumenkräfte

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+X_0=0,\quad \frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+Y_0=0.\qquad(12)$$

Die Hookeschen Gesetze haben die Form

$$\varepsilon_x=(\sigma_x-\nu\sigma_y)/E,\quad \varepsilon_y=(\sigma_y-\nu\sigma_x)/E,\quad \gamma_{xy}=\tau_{xy}/G,\qquad(13)$$

und für die Formänderungen gilt

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\varepsilon_x,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=\varepsilon_y,\quad \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=\gamma_{xy}.\qquad(14)$$

Dies sind acht Gleichungen für acht Unbekannte. Aus Gl. (14) folgt die Kompatibilitätsbedingung

$$\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\gamma_{xy}}{\partial x\,\partial y},\qquad(15)$$

und durch Einsetzen von Gln. (13) in (15) ergibt sich

$$\frac{1}{E}\left(\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial y^2}-\nu\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial x^2}-\nu\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial x^2}\right)=\frac{1}{G}\frac{\partial^2\tau_{xy}}{\partial x\,\partial y}.\qquad(16)$$

Werden nun die Gleichgewichtsbedingungen (12) durch Einführung der Airyschen Spannungsfunktion $F=F(x,y)$ derart befriedigt, daß

$$\sigma_x=\frac{\partial^2F}{\partial y^2},\quad \sigma_y=\frac{\partial^2F}{\partial x^2},\quad \tau_{xy}=\frac{\partial^2F}{\partial x\,\partial y}-X_0y-Y_0x\qquad(17)$$

ist, so folgt aus Gl. (16) für $F(x,y)$

$$\frac{\partial^4F}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4F}{\partial x^2\,\partial y^2}+\frac{\partial^4F}{\partial y^4}=\Delta\Delta F=0,\qquad(18)$$

d.h., die Airysche Spannungsfunktion muß der Bipotentialgleichung genügen. Die Bipotentialgleichung hat unendlich viele Lösungen, z.B. $F=x, x^2, x^3, y, y^2, y^3, xy, x^2y, x^3y, xy^2, xy^3$, $\cos\lambda x\cdot\cosh\lambda y$, $x\cos\lambda x\cdot\cosh\lambda y$ usw., ferner biharmonische Polynome [2] sowie die Real- und Imaginärteile von analytischen Funktionen $f(z)=f(x\pm iy)$ usw. [1]. Mit dem Ansatz geeigneter Linearkombinationen dieser Lösungen versucht man die gegebenen Randbedingungen zu befriedigen und damit das ebene Problem zu lösen.

Beispiel: Halbebene unter Einzelkraft. – Zur Lösung werden Polarkoordinaten verwendet (**Bild 4a**). Dann gilt für die Airysche Spannungsfunktion

$$\Delta\Delta F=\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)\left(\frac{\partial^2F}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2F}{\partial\varphi^2}\right)=0$$

und für die Spannungen (mit $X=Y=0$)

$$\sigma_r=\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2F}{\partial\varphi^2},\quad \sigma_t=\frac{\partial^2F}{\partial r^2},\quad \tau_{rt}=-\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial\varphi}\right).$$

Die Randbedingungen lauten

$$\sigma_t(r,\varphi=0)=0,\ \sigma_t(r,\varphi=\pi)=0,\ \tau_{rt}(r,\varphi=0)=0,\ \tau_{rt}(r,\varphi=\pi)=0.$$

Mit dem Ansatz $F(r,\varphi)=Cr\varphi\cos\varphi$ folgt

$$\Delta\Delta F=0,\quad \sigma_r=-C(2/r)\sin\varphi,\quad \sigma_t=0,\quad \tau_{rt}=0.$$

Die Lösung erfüllt die Randbedingungen. Mit der Scheibendicke h folgt die Konstante C aus der Gleichgewichtsbedingung $\sum F_{iz}=0=\int\limits_0^{\pi}\sigma_r\sin\varphi\cdot hr\,\mathrm{d}\varphi+F_0=0$ zu $C=F_0/(\pi h)$. Wegen $\tau_{rt}=0$ sind die σ_r Hauptnormalspannungen, d.h., die zugehörigen Trajektorien sind Geraden durch den Nullpunkt bzw. die dazu senkrechten Kreise um den Nullpunkt (**Bild 4b**). Die Hauptschubspannungstrajektorien liegen dazu unter 45° (s. C1.1.1). Der Verlauf der Spannungen σ_r ergibt sich für $r=R=\text{const}$ zu $\sigma_r=-2F_0/(\pi hR)\cdot\sin\varphi$ bzw. für $\varphi=\pi/2$ zu $\sigma_r=-[2F_0/(\pi h)]/r$ (**Bild 4c**).

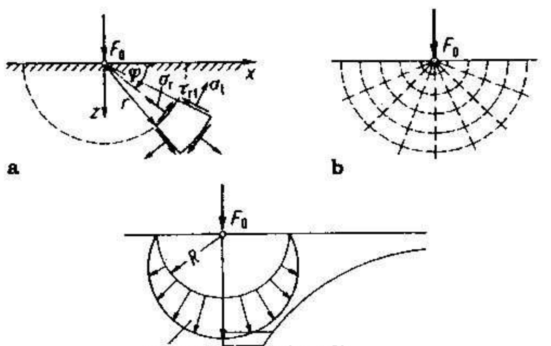


Bild 4a–c. Halbebene unter Einzelkraft

Spezielle Literatur: [1] *Szabó, I.*: Höhere Technische Mechanik, 5. Aufl. Berlin: Springer 1977. – [2] *Girkmann, K.*: Flächentragwerke, 3. Aufl. Wien: Springer 1954.

4 Beanspruchung bei Berührung zweier Körper (Hertzsche Formeln)
Pressure between elastic bodies (Formulars of Hertz)

Berühren zwei Körper einander punkt- oder linienförmig, so ergeben sich unter Einfluß von Druckkräften Verformungen und Spannungen nach der Theorie von Hertz [1, 2]. Ausgangspunkt für die Lösungen von Hertz sind die Boussinesq'schen Formeln C3(11). Vorausgesetzt wird dabei homogenes, isotropes Material und Gültigkeit des Hookeschen Gesetzes, ferner alleinige Wirkung von Normalspannungen in der Berührungsfläche. Außerdem muß die Deformation, d.h. das Maß w_0 der Annäherung (auch Abplattung genannt), beider Körper (**Bild 1a**) im Verhältnis zu den Körperabmessungen klein sein. Bei unterschiedlichem Material der berührenden Körper gilt $E = 2E_1E_2/(E_1+E_2)$. Für die Querdehnungszahl wird einheitlich $\nu = 0{,}3$ angesetzt.

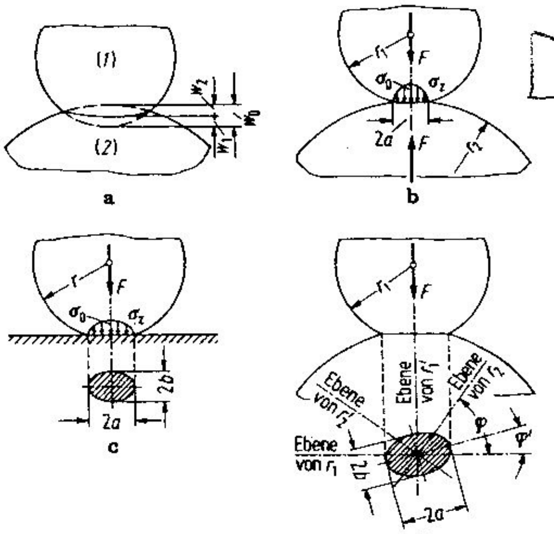


Bild 1a–d. Hertzsche Formeln

4.1 Kugel. Ball

Gegen Kugel (Bild 1b). Mit $1/r = 1/r_1 + 1/r_2$ gilt

$$\max\sigma_z = \sigma_0 = -\frac{1}{\pi}\sqrt[3]{\frac{1{,}5\cdot FE^2}{r^2(1-\nu^2)^2}},$$

$$w_0 = \sqrt[3]{\frac{2{,}25\cdot(1-\nu^2)^2F^2}{E^2 r}}.$$

Die Druckspannung verteilt sich halbkugelförmig über der Druckfläche. Die Projektion der Druckfläche ist ein Kreis vom Radius $a = \sqrt[3]{1{,}5\cdot(1-\nu^2)Fr/E}$. Die Spannungen σ_r und σ_t am mittleren Volumenelement der Druckfläche sind in der Mitte $\sigma_r = \sigma_t = \sigma_0(1+2\nu)/2 = 0{,}8\cdot\sigma_0$ und am Rand $\sigma_r = -\sigma_t = 0{,}133\cdot\sigma_0$. Umschließt die größere Kugel (als Hohlkugel) die kleinere, so ist r_2 negativ einzusetzen.

Gegen Ebene. Mit $r_2 \to \infty$, d.h. $r = r_1$, gelten diese Ergebnisse ebenfalls. Der Spannungsverlauf in z-Richtung [3] liefert die größte Schubspannung für $z = 0{,}47a$ zu $\max\tau = 0{,}31\cdot\sigma_0$ und die zugehörigen Werte $\sigma_z = 0{,}8\cdot\sigma_0$, $\sigma_r = \sigma_t = 0{,}18\cdot\sigma_0$. Wie Föppl [3] gezeigt hat, entwickeln sich Fließlinien von der Stelle der $\max\tau$ aus. Man begnügt sich jedoch üblicherweise mit dem Nachweis von $\max\sigma_z = \sigma_0$.

gewoonlijk bewijs

Spezielle Literatur S. 215

4.2 Zylinder. Cylinder

Gegen Zylinder (Bild 1b). Die Projektion der Druckfläche ist ein Rechteck von der Breite $2a$ und der Zylinderlänge l. Die Druckspannungen verteilen sich über die Breite $2a$ halbkreisförmig. Mit $1/r = 1/r_1 + 1/r_2$ gilt

$$\max\sigma_z = \sigma_0 = -\sqrt{\frac{FE}{2\pi r l(1-\nu^2)}}, \quad a = \sqrt{\frac{8Fr(1-\nu^2)}{\pi E l}}.$$

Hierbei wird vorausgesetzt, daß sich $q = F/l$ als Linienlast gleichförmig über die Länge verteilt. Die Abplattung wurde von Hertz nicht berechnet, da die begrenzte Länge des Zylinders die Problemlösung erschwert. Die Spannungen σ_x und σ_y an einem Element der Druckfläche (x in Längsrichtung, y in Querrichtung) sind in Zylindermitte $\sigma_x = 2\nu\sigma_z = 0{,}6\cdot\sigma_0$, $\sigma_y = \sigma_z = \sigma_0$. Der Spannungsverlauf in z-Richtung [3] liefert die größte Schubspannung in der Tiefe $z = 0{,}78\cdot a$ zu $\max\tau = 0{,}30\cdot\sigma_0$. Am mittleren Volumenelement der Berührungsfläche ist in der Mitte des Zylinders

$$\max\tau = 0{,}5(\sigma_1 - \sigma_3) = 0{,}5(\sigma_0 - 0{,}6\cdot\sigma_0) = 0{,}2\cdot\sigma_0$$

und am Zylinderende $\max\tau = 0{,}5\cdot\sigma_0$. Dabei liegt $\max\tau$ in Flächenelementen schräg zur Oberfläche, da voraussetzungsgemäß in den Oberflächenelementen selbst und damit nach dem Satz von den zugeordneten Schubspannungen auch in Flächenelementen senkrecht dazu $\tau = 0$ ist, d.h. die Oberflächenspannungen Hauptspannungen sind.

Gegen Ebene. Mit $r_2 \to \infty$ gelten die entsprechenden Ergebnisse.

4.3 Beliebig gewölbte Fläche. Curved surface

Gegen Ebene (Bild 1c). Sind die Hauptkrümmungsradien im Berührungspunkt r und r', so bildet sich als Projektion der Druckfläche eine Ellipse mit den Halbachsen a und b in Richtung der Hauptkrümmungsebenen aus. Die Druckspannungen verteilen sich nach einem Ellipsoid. Es gilt

$$\max\sigma_z = \sigma_0 = 1{,}5\cdot F/(\pi ab),$$
$$a = \sqrt[3]{3\xi^3(1-\nu^2)F/[E(1/r+1/r')]},$$
$$b = \sqrt[3]{3\eta^3(1-\nu^2)F/[E(1/r+1/r')]},$$
$$w_0 = 1{,}5\cdot\psi(1-\nu^2)F/Ea.$$

Die Werte ξ, η, ψ sind abhängig von dem Hilfswinkel
$\vartheta = \arccos[(1/r' - 1/r)/(1/r' + 1/r)]$.

Tabelle 1.

ϑ	90°	80°	70°	60°	50°	40°	30°	20°	10°	0°
ξ	1	1,128	1,284	1,486	1,754	2,136	2,731	3,778	6,612	∞
η	1	0,893	0,802	0,717	0,641	0,567	0,493	0,408	0,319	0
ψ	1	1,12	1,25	1,39	1,55	1,74	1,98	2,30	2,80	∞

Gegen beliebig gewölbte Fläche (Bild 1d). Gegeben: Hauptkrümmungsradien r_1 und r_1', r_2 und r_2' ferner Winkel φ zwischen den Ebenen von r_1 und r_2 [4]. Zurückführung auf den vorstehenden Fall unter Voraussetzung von $r_1 > r_1'$ und $r_2 > r_2'$ durch Einführung von

$$1/r' + 1/r = 1/r_1' + 1/r_1 + 1/r_2' + 1/r_2, \tag{1}$$

$$\frac{1}{r'} - \frac{1}{r} = \sqrt{\left(\frac{1}{r_1'} - \frac{1}{r_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{r_2'} - \frac{1}{r_2}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{r_1'} - \frac{1}{r_1}\right)\left(\frac{1}{r_2'} - \frac{1}{r_2}\right)\cos 2\varphi}. \tag{2}$$

Projektion der Druckfläche ist wiederum Ellipse mit den Halbachsen a und b. Achse a liegt zwischen den Ebenen von r_1 und r_2. Winkel φ' aus

$$(1/r' + 1/r)\sin 2\varphi' = (1/r'_1 - 1/r_1)\sin 2\varphi.$$

Umschließt ein größerer Körper (Hohlprofil) den kleineren, so sind entsprechende Radien negativ einzuführen. Wert nach Gl. (2) darf dabei nicht größer werden als Wert nach Gl. (1).

Spezielle Literatur: [1] *Hertz, H.*: Über die Berührung fester elastischer Körper. Ges. Werke, Bd. I. Leipzig: Barth 1895. – [2] *Szabó, I.*: Höhere Technische Mechanik, 5. Aufl. Berlin: Springer 1977. – [3] *Föppl, L.*: Der Spannungszustand und die Anstrengung der Werkstoffe bei der Berührung zweier Körper. Forsch. Ing.-Wes. 7 (1936) 209–221. – [4] *Timoshenko, S.; Goodier, J.N.*: Theory of elasticity, 2nd Ed. New York: McGraw-Hill 1951.

5 Flächentragwerke
Plane Load-bearing structures

5.1 Platten. Plates

Unter der Voraussetzung, daß die Plattendicke h klein zur Flächenabmessung und die Durchbiegung w ebenfalls klein ist, ergibt sich mit der Flächenbelastung $p(x, y)$ und der Plattensteifigkeit $N = Eh^3/[12(1-\nu^2)]$ für die Durchbiegungen $w(x, y)$ die Bipotentialgleichung

$$\Delta\Delta w = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p(x, y)}{N}. \qquad (1)$$

Die Biegemomente M_x und M_y sowie das Torsionsmoment M_{xy} folgen aus

$$M_x = -N(\partial^2 w/\partial x^2 + \nu\,\partial^2 w/\partial y^2),$$
$$M_y = -N(\partial^2 w/\partial y^2 + \nu\,\partial^2 w/\partial x^2), \qquad (2)$$
$$M_{xy} = -(1-\nu)N\,\partial^2 w/(\partial x\,\partial y).$$

Die Extremalspannungen an Plattenober- oder -unterseite ergeben sich aus

$$\sigma_x = M_x/W, \quad \sigma_y = M_y/W, \quad \tau = M_{xy}/W, \qquad (3)$$

wobei das Widerstandsmoment $W = h^2/6$ ist. Bei rotationssymmetrisch belasteten Kreisplatten wird $w = w(r)$, und Gl. (1) geht in die gewöhnliche Eulersche Differentialgleichung

$$w''''(r) + \frac{2}{r}w'''(r) - \frac{1}{r^2}w''(r) + \frac{1}{r^3}w'(r) = \frac{p(r)}{N} \qquad (4)$$

über. Ferner gilt

$$M_r = -N\left(w'' + \frac{\nu}{r}w'\right), \quad M_t = -N\left(\nu w'' + \frac{1}{r}w'\right), \qquad (5)$$

$$\sigma_r = M_r/W, \quad \sigma_t = M_t/W \quad \text{mit} \quad W = h^2/6. \qquad (6)$$

Torsionsmomente treten wegen der Rotationssymmetrie nicht auf. Im folgenden sind die wichtigsten Ergebnisse für verschiedene Plattentypen zusammengestellt (Querdehnungszahl $\nu = 0{,}3$).

5.1.1 Rechteckplatten. Rectangular plates

Gleichmäßig belastete Platte (Bild 1)

Ringsum gelenkig gelagerter Rand [1–3]. Die maximalen Spannungen und Durchbiegungen treten in Plattenmitte auf:

$$\sigma_x = c_1 pb^2/h^2, \quad \sigma_y = c_2 pb^2/h^2, \quad f = c_3 pb^4/Eh^3. \qquad (7)$$

In den Ecken ergeben sich abhebende Einzelkräfte $F = c_4 pb^2$, die zu verankern sind (Beiwerte c_i s. **Tab. 1**).

Ringsum eingespannter Rand. Neben den Spannungen und Durchbiegungen in Plattenmitte nach Gl. (7) treten maximale Biegespannungen in der Mitte des langen Rands auf (c_i-Werte s. **Tab. 1**):

$\sigma_y = c_5 pb^2/h^2$, zugehörig $\sigma_x = 0{,}3\sigma_y$.

Spezielle Literatur S. 218

Tabelle 1

	Gelenkig gelagerte Platte				Ringsum eingespannte Platte			
a/b	c_1	c_2	c_3	c_4	c_1	c_2	c_3	c_5
1,0	1,15	1,15	0,71	0,26	0,53	0,53	0,225	1,24
1,5	1,20	1,95	1,35	0,34	0,48	0,88	0,394	1,82
2,0	1,11	2,44	1,77	0,37	0,31	0,94	0,431	1,92
3,0	0,97	2,85	2,14	0,37	–	–	–	–
4,0	0,92	2,96	2,24	0,38	–	–	–	–
∞	0,90	3,00	2,28	0,38	0,30	1,00	0,455	2,00

Abhebende Auflagerkräfte in den Ecken in Form von Einzelkräften treten nicht auf. Ausführliche Darstellung aller Schnittlasten und Auflagerreaktionen in [4].

Gleichmäßig belastete, unendlich ausgedehnte Platte auf Einzelstützen (Bild 2). Mit der Stützkraft $F = 4a^2p$ sowie $2b \geq h$ ergibt sich für Spannungen und Durchbiegungen

$$\sigma_{xA} = \sigma_{yA} = 0{,}861 \cdot pa^2/h^2,$$
$$\sigma_{xB} = \sigma_{yB} = -0{,}62 \cdot F[\ln(a/b) - 0{,}12]/h^2,$$
$$f_A = 0{,}092 \cdot pa^4/N, \quad f_C = 0{,}069 \cdot pa^4/N.$$

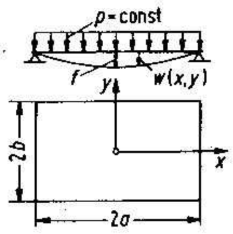


Bild 1. Rechteckplatte

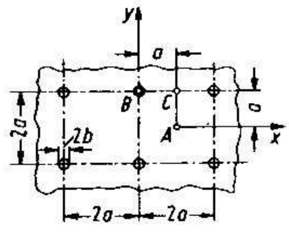


Bild 2. Platte auf Einzelstützen

5.1.2 Kreisplatten. Circular plates

Gleichmäßig belastete Platte

Gelenkig gelagerter Rand (**Bild 3a**). Die maximalen Spannungen und Durchbiegungen treten in Plattenmitte auf: $\sigma_r = \sigma_t = 1{,}24 \cdot pR^2/h^2$, $f = 0{,}696 \cdot pR^4/(Eh^3)$.

Eingespannter Rand. In der Mitte

$$\sigma_r = \sigma_t = 0{,}488 \cdot pR^2/h^2, \quad f = 0{,}171 \cdot pR^4/(Eh^3);$$

am Rand

$$\sigma_r = 0{,}75 \cdot pR^2/h^2, \quad \sigma_t = \nu\sigma_r = 0{,}225 \cdot pR^2/h^2.$$

Platte mit Einzellast (Bild 3b)

Für eine Kraft $F = \pi b^2 p$ in der Mitte, die gleichmäßig auf einer Kreisfläche vom Radius b verteilt ist, gilt bei *gelenkig gelagertem Rand*. Maximale Spannungen und Durchbiegung treten in der Mitte auf

$$\sigma_r = \sigma_t = 1{,}95(b/R)^2[0{,}77 - 0{,}135(b/R)^2 - \ln(b/R)]pR^2/h^2,$$
$$f = 0{,}682(b/R)^2[2{,}54 - (b/R)^2(1{,}52 - \ln(b/R))]pR^4/(Eh^3);$$

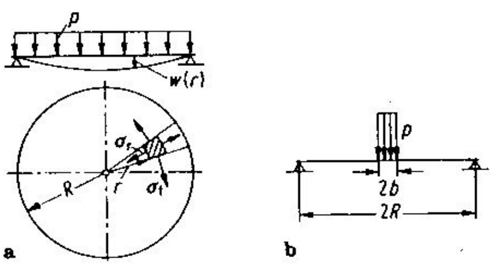


Bild 3. Kreisplatte mit a Flächenlast; b Einzellast

eingespanntem Rand: In der Mitte

$$\sigma_r = \sigma_t = 1{,}95\,(b/R)^2\,[0{,}25(b/R)^2 - \ln(b/R)]\,pR^2/h^2,$$
$$f = 0{,}682(b/R)^2\,[1-(b/R)^2\cdot(0{,}75-\ln(b/R))]\,pR^4/(Eh^3);$$

am Rand

$$\sigma_r = -0{,}75(b/R)^2\,[2-(b/R)^2]\,pR^2/h^2, \quad \sigma_t = \nu\,\sigma_r.$$

Weitere ausführliche Ergebnisse für Kreis- und Kreisringplatten unter verschiedenen Belastungen in [5].

5.1.3 Elliptische Platten. Elliptic plates

Gleichmäßig mit p belastet

Halbachsen $a > b$ (a in x-, b in y-Richtung).

Gelenkig gelagerter Rand. Maximale Biegespannung in der Mitte $\sigma_y \approx (3{,}24 - 2b/a)\,pb^2/h^2$.

Eingespannter Rand. Mit $c_1 = 8/[3 + 2(b/a)^2 + 3(b/a)^4]$ gilt in der Mitte

$$\sigma_x = 3c_1 pb^2\,[(b/a)^2 + 0{,}3]/(8h^2),$$
$$\sigma_y = 3c_1 pb^2\,[1 + 0{,}3(b/a)^2]/(8h^2),$$
$$f = 0{,}171\cdot c_1 pb^4/(Eh^3);$$

am Ende der kleinen Achse

$$\min\sigma = \sigma_y = -0{,}75\cdot c_1 pb^2/h^2, \quad \sigma_x = \nu\sigma_y;$$

am Ende der großen Achse

$$\sigma_x = -0{,}75\cdot c_1 pb^4/(a^2h^2), \quad \sigma_y = \nu\sigma_x.$$

5.1.4 Gleichseitige Dreieckplatte. Triangular plate

Gleichmäßig mit p belastet

Ringsum gelenkig gelagert (**Bild** 4). Für den Plattenschwerpunkt S gilt

$$\sigma_x = \sigma_y = 0{,}145\cdot pa^2/h^2, \quad f = 0{,}00103\cdot pa^4/N.$$

Die Maximalspannung tritt bei $x = 0{,}129a$ und $y = 0$ auf und ist $\sigma_y = 0{,}155\cdot pa^2/h^2$.

5.1.5 Temperaturspannungen in Platten
Temperature stresses in plates

Bei einer Temperaturdifferenz Δt zwischen Ober- und Unterseite ergeben sich bei Platten mit allseits freien Rändern keine Spannungen, bei allseits gelenkig gelagerten Platten Spannungen nach der Plattentheorie [6].

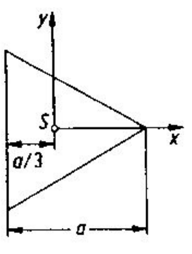


Bild 4. Dreieckplatte

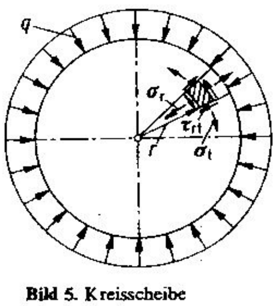


Bild 5. Kreisscheibe

Bei allseits eingespannten Platten wird

$$\sigma_x = \sigma_y = \alpha_t\,\Delta t\,E/[2(1-\nu)] = \sigma_r = \sigma_t.$$

5.2 Scheiben. Plates, loaded in their planes

Hierbei handelt es sich um ebene Flächentragwerke, die in ihrer Ebene belastet sind. Zur theoretischen Ermittlung der Spannungen mit der Airyschen Spannungsfunktion s. C3.3. Im folgenden werden für einige technisch wichtige Fälle die Spannungen angegeben. Die Dicke der Scheiben sei h.

5.2.1 Volle Kreisscheibe. Circular plate

Radiale gleichmäßige Streckenlast q (Bild 5).

$$\sigma_r = \sigma_t = -q/h, \quad \tau_{rt} = 0.$$

Gleichmäßige Erwärmung Δt. Bei einer Scheibe mit verschieblichem Rand ergeben sich nur Radialverschiebungen $u(r) = \alpha_t\,\Delta t r$, aber keine Spannungen. Bei unverschieblichem Rand ($u = 0$) gilt

$$\sigma_r = \sigma_t = -E\alpha_t\,\Delta t/(1-\nu), \quad \tau_{rt} = 0.$$

5.2.2 Ringförmige Scheibe. Circular ring plate

Radiale Streckenlast innen und außen (Bild 6a).

$$\sigma_r = -\frac{q_i r_i^2}{h(r_a^2 - r_i^2)}\left(\frac{r_a^2}{r^2} - 1\right) - \frac{q_a r_a^2}{h(r_a^2 - r_i^2)}\left(1 - \frac{r_i^2}{r^2}\right),$$
$$\sigma_t = +\frac{q_i r_i^2}{h(r_a^2 - r_i^2)}\left(\frac{r_a^2}{r^2} + 1\right) - \frac{q_a r_a^2}{h(r_a^2 - r_i^2)}\left(1 + \frac{r_i^2}{r^2}\right), \quad \tau_{rt} = 0.$$

Gleichmäßige Erwärmung Δt. Bei einer Scheibe mit verschieblichen Rändern ergeben sich nur Radialverschiebungen $u(r) = \alpha_t\,\Delta t r$, aber keine Spannungen. Bei unverschieblichem äußeren Rand ($u = 0$) gilt

$$\sigma_r = -E\alpha_t\,\Delta t\,\frac{r_a^2}{(1-\nu)r_a^2 + (1+\nu)r_i^2}\left(1 - \frac{r_i^2}{r^2}\right),$$
$$\sigma_t = -E\alpha_t\,\Delta t\,\frac{r_a^2}{(1-\nu)r_a^2 + (1+\nu)r_i^2}\left(1 + \frac{r_i^2}{r^2}\right), \quad \tau_{rt} = 0.$$

Ringförmige Schublast (Bild 6b). Sind τ_i und $\tau_a = \tau_i r_i^2/r_a^2$ die einwirkenden Schubspannungen, so gilt

$$\tau_{rt}(r) = \tau_i r_i^2/r^2, \quad \sigma_r = \sigma_t = 0.$$

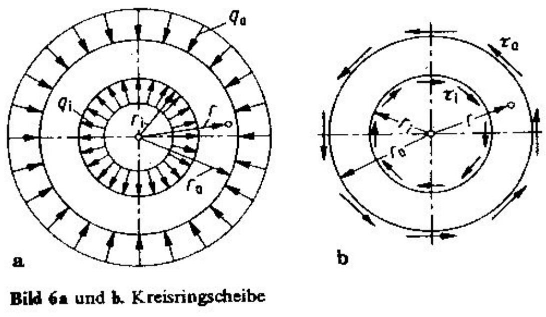


Bild 6a und b. Kreisringscheibe

5.2.3 Unendlich ausgedehnte Scheibe mit Bohrung (Bild 7). Infinite plate with a hole

Infolge Innendrucks $p = q/h$ entstehen die Spannungen

$$\sigma_r = -pr_i^2/r^2, \quad \sigma_t = +pr_i^2/r^2, \quad \tau_{rt} = 0.$$

5.2.4 Keilförmige Scheibe unter Einzelkräften (Bild 8)
Wedge-shaped plate

Für die Spannungen gilt

$$\sigma_r = -\frac{2F_1\cos\varphi}{rh(2\beta + \sin 2\beta)} + \frac{2F_2\sin\varphi}{rh(2\beta - \sin 2\beta)}, \quad \sigma_t = 0, \quad \tau_{rt} = 0.$$

Bijlage C

Catalogus luchtveren

De gegevens in deze bijlage staan niet in SI eenheden, het onderstaande kan helpen bij de omzetting:

- 1 inch=0,0254 m
- 1 pound=0,453592 kg
- 1 psi= 6894,8 Pa
- 1 psig=108248,4 Pa

AIRSTROKE®
ACTUATORS

AIRMOUNT®
ISOLATORS

Firestone

World's Number 1 Air Spring.

FIRESTONE INDUSTRIAL PRODUCTS COMPANY

ASAM 011

Firestone

AIRSTROKE® ACTUATORS

AIRMOUNT® ISOLATORS

The first successful application of airsprings for vibration isolation occurred during the late nineteen thirties. Airsprings were developed by Firestone to fill a need for a more efficient suspension system for highway trucks, trailers, and buses. Airide® springs, as they were named, provided the means for a suspension that reduced the amount of road shock and vibration transmitted into the vehicle. Billions of miles of actual use have proven the dependability and effectiveness of the air suspension concept using Airide springs by Firestone.

Airmount isolators and Airstroke actuators are a further application and refinement of the Airide spring. They are basically the same product with the use of the product determining which name is applied to it. Some parts, however, are designed for a particular application, and all parts are not necessarily compatible with all three applications.

Airsprings are highly engineered elastomeric bellows with specially designed metal end closures. The bellows itself is constructed from plies of cord-reinforced rubber with standard construction utilizing two plies of special cord fabric. High strength versions designed to handle greater loads and pressures are also available on many of the styles. Airmount isolators and Airstroke actuators are capable of handling loads up to 100,000 pounds and can be designed into systems to utilize up to fourteen inches of stroke. The standard airspring will operate in temperatures from –35°F to 135°F and special compounds are available on some parts to extend this range.

TYPICAL APPLICATIONS

AIRSTROKE ACTUATORS

Airstroke actuators are used primarily in place of pneumatic or hydraulic cylinders. A few of the typical applications currently include:

Surface area presses
Stamping presses
Conveyors
Clamping devices
Assembly equipment
Irrigation equipment
Automotive alignment equipment
Paper and textile machinery
Sawmill machinery
Material handling
Valves
Commercial laundry

Due to the unique capabilities of Airstroke and Airmount products, many applications are in use where the product is used for both actuation and isolation, or for a completely different purpose. Just a few of these applications include:

Protective boots
Flexible connectors
Vacuum devices
Shock absorbers
Expansion chambers
Drive couplings

AIRMOUNT ISOLATORS

Airmount isolators are used as vibration isolators on many different types of equipment. Following is a partial list of just a few of the typical types of installations.

Lasers
Holographs
Electron microscopes
Optical benches
Spectrometers
Interferometers
Test bed shakers
Shock test equipment
Forging hammers
Generator sets
Industrial machinery
Fans
Anechoic chambers
Vibrating screens and sifters
Earthquake simulator
Vibrating conveyors and feeders
Inertial mass mountings
Vibrating test equipment
Seat springs

Firestone Selection Guide

END CLOSURE OPTIONS

SHAPED SLEEVE

Style Number	Maximum Diameter at 100 PSIG (inches)	High Strength Number	Bead Plate Type	Dim. A (blind nut centers) (inches)	Dim. B (inches)	Bead Ring Type	Dim. C (bolt circle diameter) (inches)	Number of Bolts (each ring)
1M1A-0	3.4		SEE INDIVIDUAL DATA PAGE					
1M1A-1	3.45							
2M1A	3.5							
2M2A	2.3							

SINGLE CONVOLUTION

Style Number	Maximum Diameter at 100 PSIG (inches)	High Strength Number	Bead Plate Type	Dim. A (blind nut centers) (inches)	Dim. B (inches)	Bead Ring Type	Dim. C (bolt circle diameter) (inches)	Number of Bolts (each ring)
16	6.0		1	1.75		4	4.50	6
16ST	5.4		1	1.75		N/A	N/A	N/A
131	6.5		1	1.75		4	4.50	6
110	8.3		1	1.75		4	4.50	6
116	9.1	117	1	2.75		4	5.31	6
116-1	9.6		1	2.75		4	5.31	6
115	10.1	124	3	3.50	1.75*	4	6.31	8
19	12.9		3	6.20	2.88	4	9.00	12
19-.75	13.5		3	6.20	2.88	4	9.00	12
113	15.2	128	2	6.25		4	11.31	12
113-1	15.9	128-1	2	6.25		4	11.31	12
153-2	18.1		2	6.25		N/A	N/A	N/A
119**	17.4		5	9.00	13.79	4	13.81	18
121**	20.3		5	12.00	16.50	4	16.50	24
126**	22.4		5	15.00	19.00	4	19.00	24
138-1.5	27.9					4	23.50	32
148-1	37.4	148-1 is 4Ply				4	32.68	40

DOUBLE CONVOLUTION

Style Number	Maximum Diameter at 100 PSIG (inches)	High Strength Number	Bead Plate Type	Dim. A (blind nut centers) (inches)	Dim. B (inches)	Bead Ring Type	Dim. C (bolt circle diameter) (inches)	Number of Bolts (each ring)
25	6.4		1	1.75		4	4.50	6
255-1.5	6.5		1	1.75		4	4.50	6
224	8.0		1	2.75		4	5.31	6
26	8.6		1	2.75		4	5.31	6
20	9.9	202	3	3.50	1.75*	4	6.31	8
20-2	10.4		3	3.50	1.75	4	6.31	8
22	12.9	210	3	6.20	2.88	4	9.00	12
22-1.5	13.7		3	6.20	2.88	4	9.00	12
21	15.1	205	2	6.25		4	11.31	12
21-2	16.0		2	6.25		4	11.31	12
233-2	15.5		2	6.25		4	11.31	12
28**	17.4	201	5	9.00	13.79	4	13.81	18
203**	20.0	218	5	12.00	16.50	4	16.50	24
29**	22.7	207	5	15.00	19.00	4	19.00	24
200	26.0					4	22.00	24
215	27.9					4	23.50	32
248-2	37.4	248-2 is 4Ply				4	32.68	40

TRIPLE CONVOLUTION

Style Number	Maximum Diameter at 100 PSIG (inches)	High Strength Number	Bead Plate Type	Dim. A (blind nut centers) (inches)	Dim. B (inches)	Bead Ring Type	Dim. C (bolt circle diameter) (inches)	Number of Bolts (each ring)
352	13.1		3	6.20	2.88	N/A	N/A	N/A
313	15.1	39	2	6.25		4	11.31	12
333	15.2		2	6.25		4	11.31	12
312**	18.2	314	5	9.00	13.79	4	13.81	18
323**	20.5	324	5	12.00	16.50	4	16.50	24
320**	22.4	328	5	15.00	19.00	4	19.00	24
321	27.9					4	23.50	32
348-3	37.4	348-3 is 4Ply				4	32.68	40

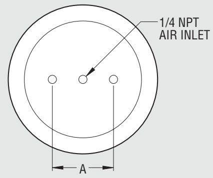
REVERSIBLE SLEEVE

Style Number	Maximum Diameter at 100 PSIG (inches)	High Strength Number	Bead Plate Type	Dim. A (blind nut centers) (inches)	Dim. B (inches)	Bead Ring Type	Dim. C (bolt circle diameter) (inches)	Number of Bolts (each ring)
1X84D-1	NOT AN AIRSTROKE ACTUATOR		SEE INDIVIDUAL DATA PAGE					
4001	3.1							
7002	4.2							
7010	4.0							
7012	5.0							
1T12E-3	5.0		1	1.75		4	4.50	6
1T14C-1	9.1		3	3.50	1.75*	4	6.31	8
1T14C-3	9.0		3	3.50	1.75*	4	6.31	8
1T14C-7	9.0	1T28C-7	3	3.50	1.75*	4	6.31	8
1T15T-1	11.2		3	6.20	2.88	4	9.00	12
1T15S-6	11.1		3	6.20	2.88	4	9.00	12
1T15L-4	11.7		3	6.20	2.88	4	9.00	12
1T15M-0	12.8		3	6.20	2.88	4	9.00	12
1T15M-2	12.6		3	6.20	2.88	4	9.00	12
1T15M-4	12.6		3	6.20	2.88	4	9.00	12
1T15M-6	12.6		3	6.20	2.88	4	9.00	12
1T15M-9	12.7		3	6.20	2.88	4	9.00	12
1T19L-7	14.2		2	6.25		4	11.31	12
1T19L-11	14.2		2	6.25		4	11.31	12

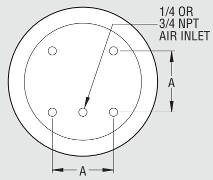
* On plates with a 3/4 inch NPT air inlet, B dimension is 1.50 inch.
** When using the rolled plate end closure option, add .7 inch to heights shown.

END CLOSURES

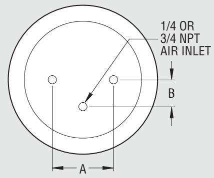
TYPE 1 bead plate



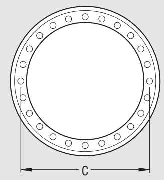
TYPE 2 bead plate



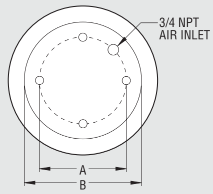
TYPE 3 bead plate



TYPE 4 bead ring

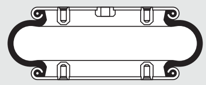


TYPE 5 bead plate

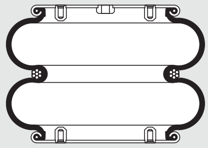


SIDE PROFILE

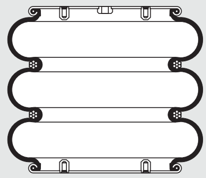
Single Convolution



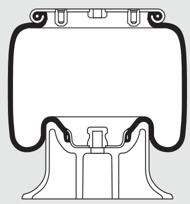
Double Convolution



Triple Convolution



Reversible Sleeve



AIRSTROKE® ACTUATORS

Style Number	Minimum Height (inches)	Maximum Stroke (inches)	80 PSI Force* at Stroke of		
			1 Inch (pounds)	3 Inches (pounds)	Maximum Stroke (pounds)
SHAPED SLEEVE					
1M1A-0	1.5	1.4	450		400
1M1A-1	1.5	2.0	490		375
2M1A	2.5	3.4	470	410	360
2M2A	1.2	1.0	10.8		10.8
SINGLE CONVOLUTION					
16	1.9	1.4	960		620
16ST	1.8	1.5	930		580
131	2.0	2.1	1,350		850
110	2.0	3.1	2,090	1,030	940
116	2.0	3.1	2,690	1,370	1,300
116-1	2.0	4.2	2,980	2,240	1,460
115	2.0	3.1	3,550	1,730	1,620
19	2.0	3.5	6,720	4,500	3,400
19-.75	2.0	3.9	7,040	5,000	3,250
113	2.0	3.8	9,900	6,890	4,650
113-1	2.0	4.6	10,860	8,800	5,500
153-2	2.5	4.8	13,135	10,604	6,422
119**	2.0	4.2	14,030	11,450	7,850
121**	2.0	3.6	19,600	14,450	11,350
126**	2.0	4.4	25,990	22,460	16,000
138-1.5	2.0	5.3	43,430	38,230	22,700
148-1	2.5	4.8	78,300	67,690	52,500
DOUBLE CONVOLUTION					
25	2.8	3.3	1,380	780	660
255-1.5	3.0	4.0	2,039	1,786	1,198
224	2.8	4.9	2,350	1,760	1,030
26	3.0	5.7	2,700	2,230	1,420
20	3.0	6.1	3,790	3,180	1,770
20-2	3.0	8.0	4,125	3,753	2,122
22	3.0	7.1	7,180	6,470	3,700
22-1.5	3.0	7.8	7,680	6,990	3,830
21	3.0	7.1	10,300	9,310	5,670
21-2	3.0	8.7	11,330	10,670	5,850
233-2	3.0	10.4	10,966	10,564	5,900
28**	3.3	6.8	15,000	13,200	8,530
203**	3.3	7.2	21,400	19,200	12,910
29**	3.3	7.5	26,900	24,400	17,280
200	3.3	7.3	35,700	33,300	24,250
215	3.3	8.8	42,500	40,000	28,160
248-2	4.2	9.1	78,200	74,100	53,990
TRIPLE CONVOLUTION					
352	4.5	11.2	8,030	7,340	4,080
313	4.5	10.5	10,650	9,700	5,460
333	4.5	12.0	10,921	10,033	5,800
312**	4.5	10.4	15,700	14,200	8,740
323**	4.5	10.9	21,200	19,500	12,420
320**	4.5	11.8	28,700	26,700	17,390
321	4.5	14.2	43,300	41,200	26,420
348-3	5.5	13.8	77,000	74,000	53,600
REVERSIBLE SLEEVE					
1X84D-1	DO NOT USE 1X84D-1 AS AN AIRSTROKE ACTUATOR				
4001	3.6	3.6	280	310	310
7002	3.5	2.5	710	660	660
7010	5.75	4.25	570	600	640
7012	5.0	4.5	690	750	760
1T12E-3	6.0	7.6	750	600	540
1T14C-1	5.0	7.7	2,790	2,570	1,720
1T14C-3	5.8	8.2	2,930	2,550	1,780
1T14C-7	8.0	9.4	3,040	2,610	1,630
1T15T-1	4.0	6.7	5,010	4,370	2,910
1T15S-6	6.0	10.0	5,070	4,420	2,830
1T15L-4	6.0	9.9	5,690	5,500	3,680
1T15M-0	4.3	7.0	5,700	5,550	3,840
1T15M-2	5.0	8.3	6,080	5,930	4,060
1T15M-4	6.0	10.5	6,270	5,730	4,020
1T15M-6	7.0	12.2	6,280	5,730	3,950
1T15M-9	8.5	15.1	6,450	5,850	4,210
1T19L-7	6.0	12.8	8,800	7,300	4,700
1T19L-11	8.0	15.4	8,600	7,300	5,100

* To determine Airstroke force at other pressures, divide force shown by 80 PSIG and multiply result by new pressure.

** When using the rolled plate end closure option, add .7 inch to heights shown.

Advantages of:

AIRSTROKE®

ACTUATORS

Why use an Airstroke actuator (rather than air or hydraulic cylinder) for actuation?

LOW COST

Generally, the initial cost of an Airstroke actuator is one-half or less than that of a conventional pneumatic or hydraulic cylinder of the same force capabilities. This initial cost advantage is many times greater in the larger sizes.

WIDE SIZE RANGE

Airstroke actuators are available in sizes ranging from 2.2 inches to 37 inches in diameter. The force capability is 100,000 pounds. Strokes of up to 14 inches are possible.

DURABLE FOR LONG LIFE

Airstroke actuators are another application of the proven Firestone Airide spring used on truck and bus suspensions. Airide springs have proven longevity and durability to perform under adverse environmental conditions – a critical factor in machine design.

NO MAINTENANCE OR LUBRICATION REQUIRED

Airstroke actuators have no internal rods, pistons, or sliding seals that would require lubrication or maintenance. This allows for the design of Airstroke actuators into applications where dirt or grit would destroy the seals on conventional cylinders.

FRICTION FREE FOR IMMEDIATE RESPONSE

Since Airstroke actuators have no sliding seals, there is no break-away friction as with conventional cylinders.

FLEXIBLE MEDIA

An Airstroke actuator can do its work with either a liquid or gas. (Please see page 14 in our Engineering Manual for acceptable media choices.)

ANGULAR CAPABILITY

An Airstroke actuator possesses the unique capability of stroking through an arc without a clevis. Angular motion of up to 30 degrees is possible, along with the design advantage of generally less complex linkages.

SIDE LOADING CAPABILITY

Airstroke actuators, within certain limits, are not affected by side loads as are conventional cylinders. This misalignment capability eliminates potential rod bending, scoring, and excessive seal wear common to conventional cylinders.

COMPACT STARTING HEIGHT

Airstroke actuators have a low profile compared to conventional cylinders. Our smallest Airstroke actuator (2.2 inch/dia.) collapses to just 1.2 inches in height, while our largest triple convoluted Airstroke (37 inch/dia.) will collapse to a very compact 5.5 inches.

FACTORY SEALED AND TESTED

Most Airstroke actuators feature Firestone's proven concept of crimped end plates. The crimped design allows for pre-shipment testing and quicker installation on equipment.

Airstroke® Actuator Selection Procedure

Refer to the **selection guide** on page 4 for Airstroke actuator force and stroke capabilities. This information is intended to give a general guide to part capabilities. Before selecting the correct Airstroke actuator you need to know certain attributes of your application. Once this data is known, the selection is relatively easy. For more detailed information please obtain a copy of Firestone's Engineering Manual and Design Guide.

1. STROKE:

The maximum STROKE CAPABILITY of an Airstroke actuator is the difference between the maximum useable height and the minimum height. This entire stroke, or any portion thereof, may be used. If an internal rubber bumper is required, please note that the **minimum height is increased**, and therefore, the total stroke is decreased. Once this is determined, you can choose the general style of part you would need. For strokes of less than 3 to 4 inches, the Single Convolution parts are generally the most efficient. Use the shortest style that will give you the necessary stroke for your application.

2. FORCE:

Read the forces from the chart for 100 psi at 1 inch, 50% of Maximum Stroke, and Maximum Stroke. Notice that the force generally decreases as height increases. If you have less than 100 psi available, divide the force by 100 and multiply by your available pressure. If your stroke is between these values, a straight line interpolation will approximate the value. You should always check our Engineering Manual and Design Guide for more exact information.Select the smallest part with the necessary stroke to meet your force requirements.

3. DIMENSIONAL DATA CAN BE FOUND ON PAGE 3:

It is important to make sure that the part you select will fit in the available space. The higher the force required the larger in diameter the part. The longer the stroke, the higher the minimum height. Make sure that you follow all of the guidelines shown in the Do's and Don'ts section below.

4. SELECT THE END CLOSURES AND AIR INLET SIZE:

Most Airstroke actuators are available with either permanently attached plates or bead ring (flange) attachments. (See end closure options chart for attachments, air fittings, and attachment locations.) Most parts with plates are available with either 1/4" or 3/4" NPT air fittings.

Do's and Don'ts

DOWN AND UP STOPS

Positive stops in both directions (compression and extension) should always be used with Airstroke actuators.

1. In COMPRESSION, the minimum height shown for each air spring is at, or slightly above the PINCH POINT of the bellows. The bellows can be damaged if allowed to constantly bottom out; therefore, a down stop is required to prevent this. An external down stop can be something as simple as a steel block and should be sized at or slightly greater than the minimum height of the Airstroke actuator. If an external down stop cannot be used, many parts are available with internal rubber bumpers. See Engineering Manual and Design Guide.
2. In EXTENSION, an up stop is required to prevent the air spring from overextending. Failure to install an up-stop could result in a reduced bellow life, and allow the end crimp seal to open up.

   There are many ways to design-in an up-stop, including a) a chain, b) a cable, or c) contacting a metal stop, etc.

RETURN

An Airstroke actuator is a single acting device. To return the actuator to its minimum height for another cycle or stroke, some return force must be used. Gravity acting on the load may be all that's required. (Refer to the order block section in the Engineering Manual for the force required to return convoluted Airstroke actuators to minimum height.) If the load is not sufficient, then a second actuator or coil spring may be required.

GUIDING

An Airstroke actuator follows the path of least resistance; therefore, the actuator should always be guided. This is often easily accomplished in the mounting geometry.

ANGULAR CAPABILITY

An Airstroke actuator can stroke through an arc without a clevis. Angular motion of up to 30 degrees is possible. When using an actuator with the mounting plates at an angle to each other, observe the following:

a. Measure force at the height between the plate centers.
b. Measure maximum height at the side separated the furthest.
c. Measure minimum height at the side collapsed the most.

These measurements must fall within the guide lines for that particular part.

Reversible sleeve type (1T) parts may also stroke through an arc. In this case, care must be taken to prevent the bellows from rubbing (internally) against itself where it rolls over the piston.

HORIZONTAL MISALIGNMENT

The upper and lower bead plate centers (or mounting plate centers in the case of a bead ring type attachment) may be out of line somewhat without injury to the bellows. Our "rule of thumb" for convoluted type actuators is one inch misalignment allowed per convolution. So, a single convoluted air spring may be out of line by as much as 1 inch, a double convoluted by 2 inches, and a triple convoluted air spring by 3 inches.

DESIGN ENVELOPE

Adequate clearance should be provided around the Airstroke actuator to prevent puncturing or rubbing of the bellows. (Refer to the selection guide on page 3 for the maximum diameter at 100 psi for each Airstroke bellows.)

STACKING

It is permissible to stack actuators, one on top of another, to increase stroke; however, the center plate (or plates) connecting the two or more Airstroke actuators MUST BE GUIDED. Please note that the air spring forces are not additive in this configuration.

FAIL SAFE DEVICES

Some applications require the use of fail safe mechanisms (such as a mechanical lock-out on a scissors lift) to prevent damage or injury in the event of an air system failure.

VACUUM

An Airstroke actuator can withstand a small amount of vacuum without injury to the bellows. The maximum amount of acceptable vacuum is dependent upon the bellow's size, the height in use, and whether it is a two ply or high strength (fabric) air spring. (A high strength Airstroke bellows has a "stiffer" wall than a two ply; therefore, it is less susceptible to dimpling and deformation inward). It is generally best to use only single convoluted air springs under vacuum.

Bijlage D

Hyperelastisch gedrag van rubber

D.1 Rek energie potentialen

Hyperelastische materialen worden beschreven in termen van rek energie potentialen, $U(\varepsilon)$. Er zijn verschillende vormen van rek energie potentialen beschikbaar in ABAQUS om een onsamendrukbaar isotroop elastomeer te modelleren. Hier wordt enkel de Arruda-Boyce vorm besproken.

Arruda-Boyce vorm

De Arruda-Boyce vorm van de rek energie potentiaal is

$$\begin{aligned} U = \mu\{\frac{1}{2}(\overline{I}_1 - 3) + \frac{1}{20\lambda_m^2}(\overline{I}_1^2 - 9) + \frac{11}{1050\lambda_m^4}(\overline{I}_1^3 - 27) + \frac{19}{7000\lambda_m^6}(\overline{I}_1^4 - 81) \\ + \frac{519}{673750\lambda_m^8}(\overline{I}_1^5 - 243)\} + \frac{1}{D}(\frac{J_{el}^2 - 1}{2} - lnJ_{el}) \end{aligned} \tag{D.1a}$$

Hierin is U de rek energie per eenheid van referentievolume, μ, λ_m en D zijn temperatuursafhankelijke materiaalconstanten; $\overline{I}_1$ is de eerste invariant van de deviator rek en worden gedefinieerd als

$$\overline{I}_1 = \overline{\lambda}_1^2 + \overline{\lambda}_2^2 + \overline{\lambda}_3^2 \tag{D.2}$$

Hierin is de deviator rek $\overline{\lambda_i}=J^{-\frac{1}{3}}\lambda_i$, J is de totale volume ratio, J^{el} de elastische volume ratio en λ_i zijn de hoofdrekken. De initiële glijdingsmodulus μ_0 is gerelateerd aan μ door de uitdrukking

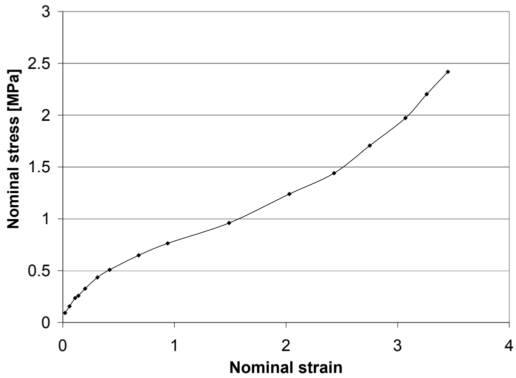
$$\mu_0 = \mu(1 + \frac{3}{5\lambda_m^2} + \frac{99}{175\lambda_m^4} + \frac{513}{875\lambda_m^6} + \frac{42039}{67375\lambda_m^8}) \tag{D.3}$$

De initiële compressiemodulus K_0 is gerelateerd aan D door de uitdrukking

$$K_0 = \frac{2}{D} \tag{D.4}$$

D.2 8% sulfur rubber

Het rubber dat besproken wordt is een 8% sulfur rubber met een hoog omkeerbaar gedrag. Het hyperelastisch gedrag van het rubber onder een biaxiale trekproef volgens [16] wordt weergegeven in Figuur D.1. De exacte waarden zijn te vinden in Tabel D.1



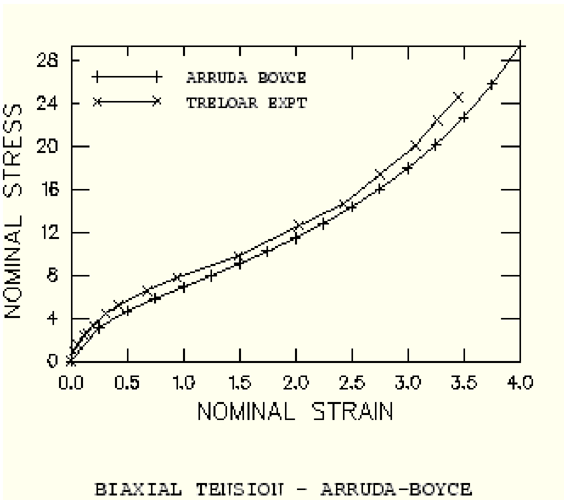
Figuur D.1: Hyperelastisch gedrag rubber onder biaxiale trekproef

Wanneer de nominale spanningen in het rubber beperkt blijven tot 0,50 MPa, dan zou men dit eerste gedeelte van de grafiek (Figuur D.1) kunnen modelleren als een rubber met een gemiddelde elasticiteitsmodulus, welke niets anders is dan de verhouding tussen de spanning en de rek, van 2.204.301 Pa. Dit komt erop neer dat men dit eerste gedeelte van de grafiek vervangt door een rechte met de elasticiteitsmodulus als richtingscoëfficiënt. De curve verloopt vlakker tussen de nominale spanningen 0,51 MPa en 1,44 MPa. Nadien wordt de curve terug steiler.

De testresultaten van de biaxiale trekproef van het rubber worden getoetst aan het Arruda-Boyce model in [16]. Het resultaat is weergegeven in Figuur D.2. De nominale spanning staat in kgf/cm^2 (=0,0981 MPa)

Nominale spanning [MPa]	Nominale rek
0,09	0,02
0,16	0,06
0,24	0,11
0,26	0,14
0,33	0,20
0,43	0,31
0,51	0,42
0,65	0,68
0,76	0,94
0,96	1,49
1,24	2,03
1,44	2,43
1,71	2,75
1,97	3,07
2,20	3,26
2,42	3,45

Tabel D.1: Nominale spanningen en nominale rek uit biaxiale trekproef



Figuur D.2: Toetsen resultaten biaxiale trekproef aan Arruda-Boyce model

Het Arruda-Boyce model geeft aanvaardbare resultaten en bijgevolg kan men het hyperelastisch gedrag van dit rubber met dit model beschrijven. De materiaalconstanten die dan verbonden zijn aan dit Arruda-Boyce model zijn

$$\mu = 0,321\,MPa \quad en \quad \lambda_m = 5,24 \tag{D.5}$$

Het rubber wordt verondersteld onsamendrukbaar te zijn, wat erop neer komt dat de compressiemodulus K_0 oneindig is en dus D=0. Uit de constanten μ en λ_m haalt men tenslotte nog de initiële glijdingsmodulus μ_0 met de vgl.(D.3) en dit geeft 0,321 MPa.

Bibliografie

[1] A. THEERENS, B. HERTELEER, Haalbaarheids- en ontwerpstudie van een 25 m hoge valtoren voor grootschallige impactproeven (2007).

[2] S. PRAKASH, V. PURI, Foundations for Machines: Analysis and Design, John Wiley & Sons, New York (1988).

[3] D. D. BARKAN, Dynamics of Bases and Foundations, McGraw-Hill, New York (1962).

[4] A. MAJOR, Dynamics in Civil Engineering. Analysis and Design, Vol. 2, Akadémiai Kiadó, Budapest (1980).

[5] W. MATEK, D. MUHS, H. WITTEL, M. BECKER, Roloff/Matek machine-onderdelen: normering, berekening, vormgeving, Academic Service, Schoonhoven (1993).

[6] A. DIMAROGONAS, S. HADDAD, Vibration for Engineers, Prentice-Hall International, Inc.

[7] W. BEITZ, K.-H. KÜTTNER, Dubbel-Taschenbuch für den Maschinenbau, Springer-Verlag, Berlin (1981).

[8] C. M. HARRIS, A. G. PIERSON, Harris' Shock And Vibration Handbook Fifth Editon, McGraw Hill, New York (2002).

[9] http://www.nl.wikipedia.org/wiki/Eindige-elementenmethode

[10] ABAQUS ANALYSIS USER'S MANUAL (v6.6) Overview of the ABAQUS finite element system

[11] http://www.berekeningvanconstructies.be/2_1.htm

[12] http://www.nl.wikipedia.org/wiki/Elasticiteitsmodulus

[13] http://www.nl.wikipedia.org/wiki/Poisson-factor

[14] L. VANHOOYMISSEN, M. SPEGELAERE, A. VAN GYSEL, W. DE VYLDER, Gewapend beton-berekening volgens NBN B15-002(1999), Academia Press, Gent (2002)

[15] ABAQUS ANALYSIS USER'S MANUAL (v6.6) Hyperelastic behavior of rubberlike materials

[16] ABAQUS BENCHMARKS MANUAL (v6.6) Fitting of rubber test data

[17] ABAQUS EXAMPLE PROBLEMS MANUAL (v6.6) Hydrostatic fluid elements: modeling an airspring

[18] http://www.simetric.co.uk/si_materials.htm

[19] ABAQUS ANALYSIS USER'S MANUAL(v6.6) Amplitude curves

[20] http://www.en.wikipedia.org/wiki/Stress_(physics)